§6.3 生成ネットワークの構造学習

・Deep learningモデルの学習

→性能の良いネットワークの構造を見つけるのが難しい.

→ インド料理過程 (Indian buffet process) を使って,

データからネットワークの構造 (各層の幅や深さ, ユニットのつながりかた)

を推定する.

6.3.1 インド料理過程

・インド料理過程 (Indian buffet process):

列数が可算無限個のバイナリ行列 (要素が0か1の行列)

を生成するモデル.

6.3.1.1 無限行列の生成

・$M \in M_{N,H}(\{0,1\})$ を考え, $H \to \infty$ のときの M の生成過程を構築.

[仮定] ・Mの第h列の要素は $m_{n,h} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Bern}(\pi_h) \quad (n=1,\dots,N)$

・各hに対し, $\pi_h \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Beta}(\frac{\alpha\beta}{H}, \beta) \quad (\alpha, \beta > 0,\ h=1,\dots,H)$

・Mの分布は

$$
\begin{aligned}
& p(M) \\
&= \prod_{h=1}^{H} \prod_{n=1}^{N} p(m_{n,h}) \\
&= \prod_{h=1}^{H} \prod_{n=1}^{N} \int p(m_{n,h}, \pi_h)\, d\pi_h
\end{aligned}
$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \int \prod_{n=1}^{N} p(m_{n,h}, \pi_h)\, d\pi_h$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \int \prod_{n=1}^{N} p(m_{n,h} \mid \pi_h)\, p(\pi_h)\, d\pi_h$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \int p(\pi_h) \prod_{n=1}^{N} p(m_{n,h} \mid \pi_h)\, d\pi_h$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \int \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(\beta)} \pi_h^{\frac{\alpha\beta}{H}-1} (1-\pi_h)^{\beta-1} \prod_{n=1}^{N} \pi_h^{m_{n,h}} (1-\pi_h)^{1-m_{n,h}}\, d\pi_h .$$

ここで, $N_h := \sum_{n=1}^{N} m_{n,h}$ (第h列の1の個数) とすると,

$$p(M)$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(\beta)} \underbrace{\int \pi_h^{N_h+\frac{\alpha\beta}{H}-1} (1-\pi_h)^{N-N_h+\beta-1}\, d\pi_h}_{\text{ベータ分布の全範囲での積分が1になるのを使って計算}}$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma\left(N_h+\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+N\right)}$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+N_h\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+N\right)} \cdot \frac{\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma(\beta)}$$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$= \prod_{h=1}^{H} \left(\prod_{n=0}^{N_h-1} \left(\frac{\alpha\beta}{H}+n\right)\right) \underbrace{\left(\prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+n}\right)}_{\text{二つに分ける}} \left(\prod_{n=0}^{N-N_h-1} (\beta+n)\right)$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \left(\prod_{n=0}^{N_h-1} \left(\frac{\alpha\beta}{H}+n\right)\right) \underbrace{\left(\prod_{n=0}^{N_h-1} \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+n}\right) \left(\prod_{n=0}^{N-N_h-1} \frac{1}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+N_h+n}\right)} \left(\prod_{n=0}^{N-N_h-1} (\beta+n)\right)$$

$$= \prod_{h=1}^{H} \left(\prod_{n=0}^{N_h-1} \underbrace{\frac{\frac{\alpha\beta}{H}+n}{\frac{\alpha\beta}{H}+n+\beta}}_{\in(0,1)}\right) \left(\prod_{n=0}^{N-N_h-1} \underbrace{\frac{\beta+n}{\frac{\alpha\beta}{H}+N_h+\beta+n}}_{\in(0,1)}\right)$$

$$=: \prod_{h=1}^{H} \underbrace{K_h}_{\in(0,1)} \xrightarrow[H\to\infty]{} 0 .$$

$H \to \infty$ で全てのバイナリ行列の生成確率が 0 になってしまう.

これを防ぐため,

$[M] := \{ M' \in M_{N,H}(\{0,1\}) \mid M'$の列を並びかえると$M$と一致する$\}$

と行列の同値類をつくり, $[M]$ に関する分布を考えることにする.

cf.) 同値類.

集合 X における二項関係 $\sim$ が $^\forall x, y, z \in X$ に対し

(1) $x \sim x$ (2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

をみたすとき, $\sim$ を同値関係という. (e.g., $=$, 図形の相似関係 などいろいろ)

集合 $[x] := \{ x' \in X \mid x' \sim x \}$ を x の同値類という.

$x' \in [x]$ を一つ選ぶとき, x' を同値類 $[x]$ の代表元という.

同値類を全てあつめた集合 $X/\sim := \{ [x] \mid x \in X \}$ を $\sim$ による X の商集合という.

・特に, $[M]$ の代表元 M' を次のとおりに選ぶ:

M の各列を N 桁の2進数とみて, 数が大きい順に左の列から並べてできる行列を M' とする.

left-ordered form

$M' = lof(M)$ と書く.

・M の列を N 桁の2進数とみて (10進数で) i になるものの個数を

H_i $(i = 0, 1, \ldots, 2^N - 1)$ と書く.

同じものを含む順列の数を表す。

・同値類 $[M]$ に含まれる行列の個数は，多項係数を考えて

$$\left|[M]\right| = \binom{H}{H_0\ H_1\ \cdots\ H_{2^N-1}} = \frac{H!}{\prod_{i=0}^{2^N-1} H_i!}$$

コ.

・以上より，

$$p([M]) = \sum_{M' \in [M]} p(M')$$

$$= \frac{H!}{\prod_{i=0}^{2^N-1} H_i!} \prod_{h=1}^{H} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma\left(N_h+\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+N\right)} .$$

・ここで，

$$H_+ := H - H_0 \quad (N_h > 0 \text{ となる列の個数})$$

として，(left-ordered form に並べたものを考えて)

$$p([M])$$

$$= \frac{H!}{\prod_{i=0}^{2^N-1} H_i!} \left(\frac{\Gamma(N+\beta)\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+N\right)}\right)^{H_0} \prod_{h=1}^{H_+} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(\beta)} \underbrace{\frac{\Gamma\left(N_h+\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+N\right)}}_{N_h > 0 \text{ となっている.}}$$

$$= \frac{H!}{\prod_{i=0}^{2^N-1} H_i!} \left(\frac{\Gamma(N+\beta)\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+N\right)}\right)^{H_0} \left(\frac{\Gamma(N+\beta)\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta\right)}{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+N\right)}\right)^{H_+} \prod_{h=1}^{H_+} \frac{\Gamma\left(N_h+\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\beta}{H}\right)\Gamma(N+\beta)}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$= \frac{H!}{\prod_{i=0}^{2^N-1} H_i!} \left(\prod_{n=0}^{N-1} \frac{\beta+n}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+n}\right)^{H} \prod_{h=1}^{H_+} \left(\prod_{n=0}^{N_h-1} \left(\frac{\alpha\beta}{H}+n\right) \frac{\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma(N+\beta)}\right)$$

$$= \frac{H!}{\prod_{i=0}^{2^N-1} H_i!} \left(\prod_{n=0}^{N-1} \frac{\beta+n}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+n}\right)^{H} \prod_{h=1}^{H_+} \left(\frac{\alpha\beta}{H} \prod_{n=1}^{N_h-1} \left(\frac{\alpha\beta}{H}+n\right) \frac{\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma(N+\beta)}\right)$$

$$= \frac{H!}{\prod_{i=0}^{2^N-1} H_i!} \left(\prod_{n=0}^{N-1} \frac{\beta+n}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+n}\right)^{H} \left(\frac{\alpha\beta}{H}\right)^{H_+} \prod_{h=1}^{H_+} \left(\prod_{n=1}^{N_h-1} \left(\frac{\alpha\beta}{H}+n\right) \frac{\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma(N+\beta)}\right)$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^{H_+}}{\prod_{i=1}^{2^N-1} H_i!} \frac{H!}{H_0!\, H^{H_+}} \left(\prod_{n=0}^{N-1} \frac{\beta+n}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+n} \right)^H \prod_{h=1}^{H_+} \overset{H_+<\infty}{\left(\prod_{n=1}^{N_h-1} \left(\frac{\alpha\beta}{H}+n\right) \frac{\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma(N+\beta)} \right)}.$$

・さて，

$$\frac{H!}{H_0!\, H^{H_+}} = \frac{1}{H^{H_+}} \prod_{h=1}^{H_+} (H-h+1) = \prod_{h=1}^{H_+} \left(1 - \frac{h}{H} + \frac{1}{H}\right) \xrightarrow[H\to\infty]{H_+<\infty} 1.$$

また，

$$\left(\prod_{n=0}^{N-1} \frac{\beta+n}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta+n} \right)^H = \left(\prod_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\alpha\beta}{H(\beta+n)} + 1 \right)^{-1} \right)^H = \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \frac{\alpha\beta}{H(\beta+n)}\right)^{-H}$$

$$\xrightarrow[H\to\infty]{} \prod_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{\alpha\beta}{\beta+n}\right) = \exp\left(-\alpha \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\beta}{n+\beta}\right) = \exp\Bigl(-\underbrace{\alpha \sum_{n=1}^{N} \frac{\beta}{n+\beta-1}}_{=:\, \overline{H}_+}\Bigr)$$

$$= \exp(-\overline{H}_+).$$

さらに，

$$\prod_{n=1}^{N_h-1} \left(\frac{\alpha\beta}{H}+n\right) \xrightarrow[H\to\infty]{N_h<\infty,\ \alpha\beta<\infty.} (N_h-1)! = \Gamma(N_h).$$

よって，

$$p([M]) \xrightarrow[H\to\infty]{} \frac{(\alpha\beta)^{H_+}}{\prod_{i=1}^{2^N-1} H_i!} \exp(-\overline{H}_+) \prod_{h=1}^{H_+} \frac{\Gamma(N_h)\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma(N+\beta)} =: p_\infty([M]).$$

この分布は M の行を交換しても（$\prod_{i=1}^{2^N-1} H_i!$, H_+, N_h が変わらないので）

確率が変わらない（交換可能性 をもつ）.

Remark　$\overline{H}_+$ は H_+ の期待値：$\overline{H}_+ = \mathbb{E}_{p_\infty}[H_+]$.

pf.　$\nu_i :=$ （i の 2進数表示における 1の個数）とする.

$p_\infty([M])$

$$
= \frac{(\alpha\beta)^{H_+}}{\prod_{i=1}^{2^N-1} H_i!} \exp(-\overline{H}_+) \underline{\prod_{h=1}^{H_+} \frac{\Gamma(N_h)\Gamma(N-N_h+\beta)}{\Gamma(N+\beta)}}
$$

第h列 ($h=1,\dots,H_+$) は 2進数で i ($i=1,\dots,2^N-1$) を表す. i を表す列は H_i コ.
第h列が i を表すなら, $N_h = \nu_i$.

$$
= \frac{(\alpha\beta)^{\sum_{i=1}^{2^N-1} H_i}}{\prod_{i=1}^{2^N-1} H_i!} \exp(-\overline{H}_+) \underline{\prod_{i=1}^{2^N-1} \left(\frac{\Gamma(\nu_i)\Gamma(N-\nu_i+\beta)}{\Gamma(N+\beta)} \right)^{H_i}}
$$

$$
= \exp(-\overline{H}_+) \prod_{i=1}^{2^N-1} \frac{1}{H_i!} \left(\alpha\beta \frac{\Gamma(\nu_i)\Gamma(N-\nu_i+\beta)}{\Gamma(N+\beta)} \right)^{H_i}
$$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$
= \exp(-\overline{H}_+) \prod_{i=1}^{2^N-1} \frac{1}{H_i!} \Bigg(\underbrace{\alpha\beta \frac{(\nu_i-1)!}{\prod_{n=1}^{\nu_i}(N-n+\beta)}}_{=:\lambda_i} \Bigg)^{H_i}
$$

$$
= \exp\left(-\overline{H}_+ + \sum_{i=1}^{2^N-1} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{2^N-1} \frac{\lambda_i^{H_i} e^{-\lambda_i}}{H_i!}
$$

$$
= \underbrace{\exp\left(-\overline{H}_+ + \sum_{i=1}^{2^N-1} \lambda_i\right)}_{=\mathrm{const.}} \prod_{i=1}^{2^N-1} \mathrm{Poi}(H_i \mid \lambda_i).
$$

各 H_i は独立にパラメータ λ_i の Poisson 分布に従っている.

$p_\infty([M])$ を各 H_i たちの同時分布とみると, 係数 $\exp\left(-\overline{H}_+ + \sum_{i=1}^{2^N-1} \lambda_i\right)$

は 1 でないといけない. つまり,

$$
\begin{aligned}
\overline{H}_+ &= \sum_{i=1}^{2^N-1} \lambda_i \\
&= \sum_{i=1}^{2^N-1} \mathbb{E}_{\mathrm{Poi}(H_i|\lambda_i)}[H_i] \\
&= \sum_{i=1}^{2^N-1} \mathbb{E}_{p_\infty}[H_i] \\
&= \mathbb{E}_{p_\infty}\left[\sum_{i=1}^{2^N-1} H_i\right] \\
&= \mathbb{E}_{p_\infty}[H_+]. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

・実際に，$p_\infty([M])$ に従うような行列 M をサンプリングするには，次のインド料理過程 $\mathrm{IBP}(\alpha,\beta)$ に従ってサンプリングすればよい：

$N_h^{(n)} := \sum_{i=1}^{n} m_{i,h} \quad (n=1,\dots,N)$ とする．

1. $\eta_1 \sim \mathrm{Poi}(\alpha)$; $m_{1,h} \leftarrow 1 \quad (h=1,\dots,\eta_1)$; $H \leftarrow \eta_1$. ← 客1ははじめから η_1 コの料理をとる．

2. 各 n $(n=2,3,\dots,N)$ に対し，次を行う： ← 客nの挙動

$m_{n,h} \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{N_h^{(n-1)}}{n+\beta-1}\right) \quad (h=1,\dots,H)$; ← 各料理 $h=1,\dots,H$ をとるか選ぶ．既に1となっているものが多いほど1になりやすい．（人気のある料理ほど選ばれやすい）

$\eta_n \sim \mathrm{Poi}\left(\frac{\alpha\beta}{n+\beta-1}\right)$;

$m_{n,H+h} \leftarrow 1 \quad (h=1,\dots,\eta_n)$; ← 新しい料理を η_n コとる．

$H \leftarrow H+\eta_n$;

・これで生成される M の同値類 $[M]$ の生成確率は $p_\infty([M])$ になる．

pf. N についての帰納法．N のときの $p_\infty([M])$ を $p_\infty^{(N)}([M])$，H_+ を $H_+^{(N)}$ と書き，M の n 行目までの行列を $M^{(n)}$ と書く $(n=1,\dots,N)$

・$N=1$ のとき，$H_+^{(1)} = H_1$，$\overline{H}_+ = \alpha$ なので，

$$p_\infty^{(1)}([M]) = \frac{(\alpha\beta)^{H_+^{(1)}}}{H_1!}\exp(-\alpha)\prod_{h=1}^{H_+^{(1)}}\underbrace{\frac{\Gamma(1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\beta)}}_{=\frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha^{H_1}}{H_1!}e^{-\alpha} = \mathrm{Poi}(\alpha)$$

・N のときの成立を仮定．

$N+1$ のとき，仮定より $[M^{(N)}]$ の生成確率は $p_\infty^{(N)}([M^{(N)}])$ である．

$$p_\infty^{(N+1)}([M]) = \frac{(\alpha\beta)^{H_+^{(N+1)}}}{\prod_{i=1}^{2^{N+1}-1} H_i!}\exp\left(-\alpha\sum_{n=1}^{N}\frac{\beta}{n+\beta-1} - \alpha\frac{\beta}{N+\beta}\right)\prod_{h=1}^{H_+^{(N+1)}}\frac{\Gamma(N_h)\Gamma(N+1-N_h+\beta)}{\Gamma(N+1+\beta)}$$

$$
= \left(\prod_{i=1}^{2^N-1} \frac{(\alpha\beta)^{H_i}}{H_i!}\right)\left(\prod_{i=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{(\alpha\beta)^{H_i}}{H_i!}\right) \exp\left(-\alpha \sum_{n=1}^{N} \frac{\beta}{n+\beta-1}\right) \exp\left(-\alpha \frac{\beta}{N+\beta}\right)
$$

$$
\times \prod_{i=1}^{2^N-1} \left(\frac{\Gamma(\nu_i)\Gamma(N-\nu_i+\beta)}{\Gamma(N+\beta)}\right)^{H_i} \prod_{i=1}^{2^N-1} \left(\frac{N-\nu_i+\beta}{N+\beta}\right)^{H_i} \prod_{i=2^N}^{2^{N+1}-1} \left(\frac{\Gamma(\nu_i)\Gamma(N+1-\nu_i+\beta)}{\Gamma(N+1+\beta)}\right)^{H_i}
$$

$$
= P_\infty^{(N)}([M^{(N)}]) \cdot \frac{(\alpha\beta)^{H_{2^N}}}{H_{2^N}!} \exp\left(-\alpha \frac{\beta}{N+\beta}\right) \left(\underbrace{\frac{\Gamma(1)\Gamma(N+\beta)}{\Gamma(N+1+\beta)}}_{=\frac{1}{N+\beta}}\right)^{H_{2^N}}
$$

$\nu_{2^N+i} = \nu_i + 1 \quad (\nu_i > 0)$

$$
\times \left(\prod_{i=1}^{2^N-1} \left(\frac{N-\nu_i+\beta}{N+\beta}\right)^{H_i}\right) \left(\prod_{i=1}^{2^N-1} \frac{1}{H_{2^N+i}!} \left(\alpha\beta \frac{\Gamma(\nu_{2^N+i})\Gamma(N+1-\nu_{2^N+i}+\beta)}{\Gamma(N+1+\beta)}\right)^{H_{2^N+i}}\right)
$$

$$
= P_\infty^{(N)}([M^{(N)}]) \cdot \mathrm{Poi}\left(H_{2^N} \,\middle|\, \frac{\alpha\beta}{N+\beta}\right) \prod_{i=1}^{2^N-1} \left(\left(1-\frac{\nu_i}{N+\beta}\right)^{H_i} \frac{1}{H_{2^N+i}!} \left(\alpha\beta \prod_{n=0}^{\nu_i-1} \frac{\nu_i - n}{N-n+\beta}\right)^{H_{2^N+i}}\right)
$$

$$
= P_\infty^{(N)}([M^{(N)}]) \cdot \mathrm{Poi}\left(H_{2^N} \,\middle|\, \frac{\alpha\beta}{N+\beta}\right) \prod_{i=1}^{2^N-1} \left(\left(\frac{\nu_i}{N+\beta}\right)^{H_{2^N+i}} \left(1-\frac{\nu_i}{N+\beta}\right)^{H_i}\right)
$$

$$
\times \prod_{i=1}^{2^N-1} \frac{1}{H_{2^N+i}!} \left(\alpha\beta(\nu_i-1)! \prod_{n=1}^{\nu_i-1} \frac{1}{N-n+\beta}\right)^{H_{2^N+i}}
$$

…などとやればできそう（だが示せていない…）

・IBPで生成されるバイナリ行列 M の性質.

1. 各行の1の個数は $\mathrm{Poi}(\alpha)$ に従う.

   pf. 1行目の1の個数は $\mathrm{Poi}(\alpha)$ に従う. 交換可能性があるので,

   他の行もそうである. ∎

2. 1の要素の個数の期待値は $\sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{E}_{p_\infty}[N_h] = N\alpha$

   Bern(π_h)の期待値.

   $\mathbb{E}_{\mathrm{Beta}(\frac{\alpha\beta}{H}, \beta)}[\pi_h]$

   $\parallel$

   pf. $$\sum_{h=1}^{\infty} \mathbb{E}[N_h] = \lim_{H\to\infty} \sum_{h=1}^{H} \mathbb{E}_{p(M)}[N_h] = \lim_{H\to\infty} \sum_{h=1}^{H} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}_{p(M)}[m_{n,h}]$$
   $$= \lim_{H\to\infty} \sum_{h=1}^{H} \sum_{n=1}^{N} \frac{\frac{\alpha\beta}{H}}{\frac{\alpha\beta}{H}+\beta}$$
   $$= \lim_{H\to\infty} \frac{N\alpha}{\frac{\alpha}{H}+1}$$
   $$= N\alpha.$$ ∎

3. $\mathbb{E}_{p_\infty}[H_+] = \overline{H}_+$. (既に示した)

4. $\lim_{\beta\to 0} \overline{H}_+ = \alpha$

   pf. $$\lim_{\beta\to 0} \overline{H}_+ = \lim_{\beta\to 0} \alpha \sum_{n=1}^{N} \frac{\beta}{n+\beta-1} = \lim_{\beta\to 0} \alpha \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+\frac{n-1}{\beta}}$$
   $$= \lim_{\beta\to 0} \left(\alpha + \alpha \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{1+\frac{n-1}{\beta}}\right) = \alpha.$$ ∎

5. $\lim_{\beta\to +\infty} \overline{H}_+ = N\alpha$

   pf. $$\lim_{\beta\to +\infty} \overline{H}_+ = \lim_{\beta\to +\infty} \left(\alpha + \alpha \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{1+\frac{n-1}{\beta}}\right) = N\alpha.$$ ∎