第 4 回の演習問題 解答

Takahiro INOUE

Answer 1

(1) $\mathrm{Eq}(f,g) = \{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ である (ここで, 極限錐を構成する射は包含写像 $i\colon \mathrm{Eq}(f,g) \hookrightarrow X$ である).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, dotted, "\exists!\bar{h}"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ \mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, hook, "i"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

以下, これが **Set** におけるイコライザになっていることを示す.

錐をなすこと 任意の $x \in \mathrm{Eq}(f,g)$ に対し, $f(x) = g(x)$ である. よって, $(f \circ i)(x) = f(x) = g(x) = (g \circ i)(x)$ となっている. ゆえに, $(\mathrm{Eq}(f,g), i)$ は錐をなす.

図式を可換にする射の存在と一意性 任意に錐 (A,h) が与えられたとする. このとき, 上の図式を可換にする射 $\bar{h}\colon A \to \mathrm{Eq}(f,g)$ が一意的に存在することを示す. まず, (A,h) は錐であるから, 任意の $a \in A$ に対して $(f \circ h)(a) = (g \circ h)(a)$, すなわち, $f(h(a)) = g(h(a))$ となり, $h(a) \in \mathrm{Eq}(f,g)$ である. そこで, 射 $\bar{h}$ を

$$\bar{h}\colon A \ni a \mapsto h(a) \in \mathrm{Eq}(f,g)$$

と定める. 定義より明らかに, $h = i \circ \bar{h}$ である.

あとは, このような $\bar{h}$ の一意性を示す. 上の図式を可換にするような射 $\bar{h}'\colon A \to \mathrm{Eq}(f,g)$ が与えられたとする (示すべきことは, $\bar{h}' = \bar{h}$). 図式の可換性より, $i \circ \bar{h}' = h = i \circ \bar{h}$. よって, 任意の $a \in A$ に対して $i(\bar{h}'(a)) = i(\bar{h}(a))$ が成り立つ. 包含写像 i は単射であるから, 任意の $a \in A$ に対して $\bar{h}'(a) = \bar{h}(a)$ が成り立つ. これは $\bar{h}' = \bar{h}$ を意味する.

以上より, $\mathrm{Eq}(f,g) = \{\, x \in X \mid f(x) = g(x) \,\}$ がイコライザであることが示された.

(2) まず, 圏 **Set** では任意の直積が存在していることに注意する. 圏 $\mathbf{I}$ の全ての射の集合を $\mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ と書くことにして[*1],

$$\prod_{i \in \mathbf{I}} X_i \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \prod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})} X_{\mathrm{cod}(f)}$$

の射 $s = (s_f)_{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})}$, $t = (t_f)_{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})}$ の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ 成分 $s_f, t_f\colon \prod_{i \in \mathbf{I}} X_i \to X_{\mathrm{cod}(f)}$ を

それぞれ次で定義する:

$$s_f\colon \prod_{i\in\mathbf{I}} X_i \xrightarrow{\pi_{\mathrm{dom}(f)}} X_{\mathrm{dom}(f)} \xrightarrow{m_f} X_{\mathrm{cod}(f)} \qquad t_f\colon \prod_{i\in\mathbf{I}} X_i \xrightarrow{\pi_{\mathrm{cod}(f)}} X_{\mathrm{cod}(f)}$$

また, 直積 $\prod_{f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{I})} X_{\mathrm{cod}(f)}$ に対して, $g\in\mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ 成分への射影を $\pi_g\colon \prod_{f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{I})} X_{\mathrm{cod}(f)} \to X_{\mathrm{cod}(g)}$ と書く. すると, 任意の $f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して $s_f=\pi_f\circ s,\ t_f=\pi_f\circ t$ が成立する. そして, $\mathrm{Eq}(s,t)\xrightarrow{e}\prod_{i\in\mathbf{I}} X_i$ を s,t のイコライザとして, 各 $i\in\mathbf{I}$ に対して $e_i=\pi_i\circ e$ とする. すると, $\varprojlim D\cong\mathrm{Eq}(s,t)$ であり, $\left(\mathrm{Eq}(s,t)\xrightarrow{e_i}X_i\right)_{i\in\mathbf{I}}$ が極限錐をなす.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, dotted, "\exists!\bar{h}"'] \arrow[dd, dotted, bend left, "\exists!q"] \arrow[ddl, bend right, "h_{\mathrm{dom}(f)}"'] \arrow[ddr, bend left, "h_{\mathrm{cod}(f)}"] & \\
 & \mathrm{Eq}(s,t) \arrow[d, "e"] \arrow[ddl, "e_{\mathrm{dom}(f)}"'] \arrow[ddr, "e_{\mathrm{cod}(f)}"] & \\
 & \prod_{i\in\mathbf{I}} X_i \arrow[dl, "\pi_{\mathrm{dom}(f)}"] \arrow[dr, "\pi_{\mathrm{cod}(f)}"'] & \\
X_{\mathrm{dom}(f)} \arrow[rr, "m_f"'] & & X_{\mathrm{cod}(f)}
\end{tikzcd}$$

以下, これを示す.

錐をなすこと 任意の $f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して, $e_{\mathrm{cod}(f)}=m_f\circ e_{\mathrm{dom}(f)}$ を示せば良い. 任意の $i\in\mathbf{I}$ に対して $e_i=\pi_i\circ e$ であることに注意する. さて, イコライザの性質から $s\circ e=t\circ e$ であるから,

$$\begin{aligned}
&m_f\circ e_{\mathrm{dom}(f)}\\
=\ &m_f\circ\pi_{\mathrm{dom}(f)}\circ e\\
=\ &s_f\circ e\\
=\ &\pi_f\circ s\circ e\\
=\ &\pi_f\circ t\circ e\\
=\ &t_f\circ e\\
=\ &\pi_{\mathrm{cod}(f)}\circ e\\
=\ &e_{\mathrm{cod}(f)}.
\end{aligned}$$

よって, $\left(\mathrm{Eq}(s,t)\xrightarrow{e_i}X_i\right)_{i\in\mathbf{I}}$ は錐をなす.

図式を可換にする射の存在と一意性 錐 $\left(A\xrightarrow{h_i}X_i\right)_{i\in\mathbf{I}}$ が与えられたとする. 示すべきことは, 任意の $i\in\mathbf{I}$ に対して $h_i=e_i\circ\bar{h}$ を満たす射 $\bar{h}\colon A\to\mathrm{Eq}(s,t)$ が一意的に存在することである. 直積 $\prod_{i\in\mathbf{I}} X_i$ の普遍性から, 任意の $i\in\mathbf{I}$ に対して $h_i=\pi_i\circ q$ となる射 $q\colon A\to\prod_{i\in\mathbf{I}} X_i$

*1 圏 $\mathbf{I}$ は小圏なので, $\mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ は集合になる.

が一意的に存在する．$\left(A \xrightarrow{h_i} X_i\right)_{i \in \mathbf{I}}$ は錐なので，任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して $h_{\mathrm{cod}(f)} = m_f \circ h_{\mathrm{dom}(f)}$ が成立しているが，これは q を利用すると $\pi_{\mathrm{cod}(f)} \circ q = m_f \circ \pi_{\mathrm{dom}(f)} \circ q$ と表せる．これより，任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して $\pi_f \circ t \circ q = \pi_f \circ s \circ q$ なので，$t \circ q = s \circ q$ である．よって，イコライザ $\mathrm{Eq}(s,t)$ の普遍性から $q = e \circ \bar{h}$ を満たす射 $\bar{h}$ が一意的に存在する．以上より，任意の $i \in \mathbf{I}$ に対して

$$h_i = \pi_i \circ q = \pi_i \circ (e \circ \bar{h}) = e_i \circ \bar{h}$$

が成立することがわかった．

極限は存在すれば同型を除いて一意的であるから，$\varprojlim D \cong \mathrm{Eq}(s,t)$ が示された．ところで，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Eq}(s,t) \\
=\ & \left\{ (x_i)_{i \in \mathbf{I}} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} X_i \;\middle|\; s\left((x_i)_{i \in \mathbf{I}}\right) = t\left((x_i)_{i \in \mathbf{I}}\right) \right\} \\
=\ & \left\{ (x_i)_{i \in \mathbf{I}} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} X_i \;\middle|\; \forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I}), s_f\left((x_i)_{i \in \mathbf{I}}\right) = t_f\left((x_i)_{i \in \mathbf{I}}\right) \right\} \\
=\ & \left\{ (x_i)_{i \in \mathbf{I}} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} X_i \;\middle|\; \forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I}), m_f \circ \pi_{\mathrm{dom}(f)}\left((x_i)_{i \in \mathbf{I}}\right) = \pi_{\mathrm{cod}(f)}\left((x_i)_{i \in \mathbf{I}}\right) \right\} \\
=\ & \left\{ (x_i)_{i \in \mathbf{I}} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} X_i \;\middle|\; \forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I}), m_f\left(x_{\mathrm{dom}(f)}\right) = x_{\mathrm{cod}(f)} \right\} \\
=\ & \left\{ (x_i)_{i \in \mathbf{I}} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} X_i \;\middle|\; \forall i, j \in \mathbf{I}, \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i,j), m_f(x_i) = x_j \right\}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\varprojlim D \cong \left\{ (x_i)_{i \in \mathbf{I}} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} X_i \;\middle|\; \forall i, j \in \mathbf{I}, \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i,j), m_f(x_i) = x_j \right\}$$

が言えた．

(3) Y 上の二項関係を $R := \{\, (f(x), g(x)) \in Y \times Y \mid x \in X \,\}$ とし，これを含む最小の同値関係を $\sim$ とする．すると，$\mathrm{Coeq}(f,g) = Y/{\sim}$ である（ここで，余極限余錐を構成する射は商写像 $p\colon Y \twoheadrightarrow \mathrm{Coeq}(f,g)$ である）．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "h"'] & \mathrm{Coeq}(f,g) \arrow[d, dashed, "\exists! \bar{h}"] \\
& & A
\end{tikzcd}$$

以下，これが **Set** における余イコライザになっていることを示す．$[y] := p(y)$ とする．

余錐をなすこと 任意の $x \in X$ に対し $f(x) \sim g(x)$ であるので，$[f(x)] = [g(x)]$ である．よって，$(p \circ f)(x) = [f(x)] = [g(x)] = (p \circ g)(x)$ となっている．ゆえに，$(\mathrm{Coeq}(f,g), p)$ は余錐をなす．

図式を可換にする射の存在と一意性 任意に余錐 (A, h) が与えられたとする．このとき，上の図式を可換にする射 $\bar{h}\colon \mathrm{Coeq}(f,g) \to A$ が一意的に存在することを示す．射 $\bar{h}$ を

$$\bar{h}\colon \mathrm{Coeq}(f,g) \ni [y] \mapsto h(y) \in A$$

と定める．この $\bar{h}$ の定義は同値類の代表元 y の選び方に依存しているので，まずは，この写像 $\bar{h}$ が well-defined であることを確認しよう．示すべきことは，$\bar{h}$ が代表元の選び方に依らないこと，すなわち，$y \sim y' \implies h(y) = h(y')$ である．

Y 上の二項関係 $R_h := \{\, (y, y') \in Y \times Y \mid h(y) = h(y') \,\}$ を考え，R_h を含む最小の同値関係を $\sim_h$ とする．このとき，示すべきことは $y \sim y' \implies y \sim_h y'$ と同値であり，さらにこれは $\sim \subseteq \sim_h$ と同値である．さて，$(f(x), g(x)) \in R$ を任意にとると，(A, h) が余錐であることから $h(f(x)) = h(g(x))$ が成り立つ．これより，$f(x) \sim_h g(x)$ である．$(f(x), g(x)) \in R$ は任意だったから，$R \subseteq \sim_h$ が言える．ゆえに，$\sim$ の最小性より $\sim \subseteq \sim_h$．よって，写像 $\bar{h}$ は well-defined であることが示された．そして，$\bar{h}$ の定義より明らかに，$h = \bar{h} \circ p$ である．

あとは，このような $\bar{h}$ の一意性を示す．上の図式を可換にするような射 $\bar{h}'\colon \mathrm{Coeq}(f,g) \to A$ が与えられたとする (示すべきことは，$\bar{h}' = \bar{h}$)．図式の可換性より，$\bar{h}' \circ p = h = \bar{h} \circ p$ だから，任意の $y \in Y$ に対して $\bar{h}'(p(y)) = \bar{h}(p(y))$ である．p は全射であるから，これは任意の $[y] \in \mathrm{Coeq}(f,g)$ に対して $\bar{h}'([y]) = \bar{h}([y])$，すなわち，$\bar{h}' = \bar{h}$ を意味する．

以上より，$\mathrm{Coeq}(f,g) = Y/{\sim}$ が余イコライザであることが示された．

(4) まず，圏 **Set** では任意の直和が存在していることに注意する．

$$\coprod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})} X_{\mathrm{dom}(f)} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \coprod_{i \in \mathbf{I}} X_i$$

の射 s, t をそれぞれ次で定義する:

$$s_f\colon\ X_{\mathrm{dom}(f)} \xrightarrow{m_f} X_{\mathrm{cod}(f)} \xrightarrow{\iota_{\mathrm{cod}(f)}} \coprod_{i \in \mathbf{I}} X_i \qquad t_f\colon\ X_{\mathrm{dom}(f)} \xrightarrow{\iota_{\mathrm{dom}(f)}} \coprod_{i \in \mathbf{I}} X_i$$

として，任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ と $x \in X_{\mathrm{dom}(f)}$ に対して $s(f,x) := s_f(x),\ t(f,x) := t_f(x)$．また，直和 $\coprod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})} X_{\mathrm{dom}(f)}$ への余射影を，任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ と任意の $x \in X_{\mathrm{dom}(f)}$ に対して $\iota_f(x) = (f, x)$ とする．すると，任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して $s_f = s \circ \iota_f,\ t_f = t \circ \iota_f$ が成立する．そして，$\coprod_{i \in \mathbf{I}} X_i \xrightarrow{p} \mathrm{Coeq}(s,t)$ を s, t の余イコライザとし，各 $i \in \mathbf{I}$ に対して $p_i = p \circ \iota_i$

とする．すると, $\varinjlim D \cong \mathrm{Coeq}(s,t)$ であり, $\left(X_i \xrightarrow{p_i} \mathrm{Coeq}(s,t)\right)_{i\in\mathbf{I}}$ が余極限余錐をなす.

$$
\begin{tikzcd}
X_{\mathrm{dom}(f)} \arrow[rr, "m_f"] \arrow[dr, "\iota_{\mathrm{dom}(f)}"] \arrow[ddr, "p_{\mathrm{dom}(f)}"'] \arrow[dddr, bend right, "h_{\mathrm{dom}(f)}"'] & & X_{\mathrm{cod}(f)} \arrow[dl, "\iota_{\mathrm{cod}(f)}"'] \arrow[ddl, "p_{\mathrm{cod}(f)}"] \arrow[dddl, bend left, "h_{\mathrm{cod}(f)}"] \\
& \coprod\limits_{i\in\mathbf{I}} X_i \arrow[d, "p"'] \arrow[dd, dotted, bend left, "\exists! q"] & \\
& \mathrm{Coeq}(s,t) \arrow[d, dotted, "\exists! \bar{h}"'] & \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

以下, これを示す.

余錐をなすこと 任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して, $p_{\mathrm{dom}(f)} = p_{\mathrm{cod}(f)} \circ m_f$ を示せば良い．任意の $i \in \mathbf{I}$ に対して $p_i = p \circ \iota_i$ であることに注意する．さて, 余イコライザの性質から $p \circ s = p \circ t$ であるから,

$$
\begin{aligned}
& p_{\mathrm{cod}(f)} \circ m_f \\
= \ & p \circ \iota_{\mathrm{cod}(f)} \circ m_f \\
= \ & p \circ s_f \\
= \ & p \circ s \circ \iota_f \\
= \ & p \circ t \circ \iota_f \\
= \ & p \circ t_f \\
= \ & p \circ \iota_{\mathrm{dom}(f)} \\
= \ & p_{\mathrm{dom}(f)}.
\end{aligned}
$$

よって, $\left(X_i \xrightarrow{p_i} \mathrm{Coeq}(s,t)\right)_{i\in\mathbf{I}}$ は余錐をなす.

図式を可換にする射の存在と一意性 余錐 $\left(X_i \xrightarrow{h_i} A\right)_{i\in\mathbf{I}}$ が与えられたとする．示すべきことは, 任意の $i \in \mathbf{I}$ に対して $h_i = \bar{h} \circ p_i$ を満たす射 $\bar{h}\colon \mathrm{Coeq}(s,t) \to A$ が一意的に存在することである．直和 $\coprod_{i\in\mathbf{I}} X_i$ の普遍性から, 任意の $i \in \mathbf{I}$ に対して $h_i = q \circ \iota_i$ となる射 $q\colon \coprod_{i\in\mathbf{I}} X_i \to A$ が一意的に存在する．$\left(X_i \xrightarrow{h_i} A\right)_{i\in\mathbf{I}}$ は余錐なので, 任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して $h_{\mathrm{dom}(f)} = h_{\mathrm{cod}(f)} \circ m_f$ が成立しているが, これは q を利用すると $q \circ \iota_{\mathrm{dom}(f)} = q \circ \iota_{\mathrm{cod}(f)} \circ m_f$ と表せる．これより, 任意の $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して $q \circ t \circ \iota_f = q \circ s \circ \iota_f$ なので, $q \circ t = q \circ s$ である．よって, 余イコライザ $\mathrm{Coeq}(s,t)$ の普遍性から $q = \bar{h} \circ p$ を満たす射 $\bar{h}$ が一意的に存在する．以上より, 任意の $i \in \mathbf{I}$ に対して

$$h_i = q \circ \iota_i = (\bar{h} \circ p) \circ \iota_i = \bar{h} \circ p_i$$

が成立することがわかった.

余極限は存在すれば同型を除いて一意的であるから, $\varinjlim D \cong \mathrm{Coeq}(s,t)$ が示された. ところで, $\coprod_{i\in\mathbf{I}} X_i$ 上の二項関係 S を

$$S = \left\{ (s(f,x), t(f,x)) \,\middle|\, (f,x) \in \coprod_{f\in\mathrm{Hom}(\mathbf{I})} X_{\mathrm{dom}(f)} \right\}$$

とすると,

$$\begin{aligned} & S \\ = \;& \left\{ (s_f(x), t_f(x)) \,\middle|\, f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I}),\ x \in X_{\mathrm{dom}(f)} \right\} \\ = \;& \{ (\iota_j(m_f(x)), \iota_i(x)) \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i,j),\ x \in X_i \} \\ = \;& \{ (\iota_j(x_j), \iota_i(x_i)) \mid f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i,j),\ m_f(x_i) = x_j \} \\ = \;& \{ (b,a) \mid (a,b) \in R \} \end{aligned}$$

であるから, $\sim_R = \sim_S$. よって,

$$\varinjlim D \cong \mathrm{Coeq}(s,t) = \left(\coprod_{i\in\mathbf{I}} X_i \right) \Big/ \sim_R$$

が言えた. $\square$

Comment

Set での極限/余極限の具体的な形は一見よくわからない形をしているので, これをきちんと構成して確かめてみようと思って問題を作ってみました. 実は, 環上の加群の圏における極限/余極限も同様の構成ができますので, 代数幾何やホモロジー代数などを勉強する際には役立つかもしれません. 極限ではイコライザで直積の部分集合を作っている点, 余極限では余イコライザで直和の商集合を作っている点がポイントです. 当初はこれに関連して, モノ/エピ射と部分/商対象や, Abel 圏での核や余核などについても問題を作ろうとしていたのですが, 分量や必要となる知識の関係で断念しました.

(1) まずはイコライザがどのような集合になるかを考えてみるのが良いでしょう. これは, 適当に錐 (A,h) を考えてみると, $a \in A$ に対して $f(h(a)) = g(h(a))$ を満たす必要があることから, 割とすんなり見つかると思います.

　イコライザの集合が見つかってしまえば, あとはそれが極限になることを示すだけです. 極限になることを示すには, それが錐をなすことと, 普遍性があることの二つを示せばよかったですね. 普遍性を示すために, 図式を可換にする唯一の射 $\bar{h}$ を具体的に構成する必要がありますが, 図式が可換になる条件 $h = i \circ \bar{h}$ を眺めていれば気付けると思います.

(2) 問題文の右辺の集合を, 直積とイコライザでどのように構成できるかを考えます. 各 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{I})$ に対して成り立つべき等式 $m_f(x_{\mathrm{dom}(i)}) = x_{\mathrm{cod}(f)}$ があるので, これをイコライザで表現することを考えてみると, 構成の方針を思いつけるかと思います. (それでも結構難しいで

すが......) あとは図式を眺めながら, 直積とイコライザの極限としての性質をうまく利用しつつ極限を構成していきます.

(3) (1) と同様に, まずは余イコライザがどのような集合になるかを考えてみるのが良いでしょう. 適当に余錐 (A, h) を考えてみると, $a \in A$ に対して $h(f(a)) = h(g(a))$ を満たす必要があることがあることがわかります. h に単射性などの条件が課されていない以上, これを成り立たせるには $f(a)$ と $g(a)$ を同じと見なせるような工夫が必要です. そのためには, 適当な二項関係を作り, これを含む最小の同値関係を使って同値類でまとめてしまうようにすれば良いでしょう. こうして, 余イコライザが商集合として表現できそうなことがわかります.

あとは, 余極限であることを示すだけです. 普遍性を示すために, 図式を可換にする唯一の射 $\bar{h}$ を具体的に構成する際, 定義が同値類の代表元のとり方に依存していないこと (well-defined であること) をきちんと示す必要があります. これには, Y から商集合を作るときに使った同値関係の最小性をうまく使うのが簡潔です.

(4) 問題文の右辺の集合は直和の商集合なので, これを直和と余イコライザでうまく構成できそうなのはすぐわかります. 問題は, どのような同値関係で割るべきか, というところになります. 1 から全て思いつくのはなかなか難しいですが, 余極限は極限の双対なので, (2) の証明の双対を考えながらやってみるとうまくいくでしょう.

Answer 2

(1) 定義より, $\mathscr{C}$ の各対象 $X \in \mathscr{C}$ は $\mathscr{C}^{\mathbf{I}}$ の対象 $\Delta(X)$ に写っており, $\mathscr{C}$ の各射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ は $\mathscr{C}^{\mathbf{I}}$ の射 $\Delta(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathbf{I}}}(\Delta(X),\Delta(Y))$ に写っていることがわかる．示すべきことは, 関手が射の合成を保存すること (すなわち, $\mathscr{C}$ で $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ のとき $\Delta(g \circ f) = \Delta(g) \circ \Delta(f)$ となること) と, $\mathscr{C}$ の各対象 X の恒等射 id_X が $\mathscr{C}^{\mathbf{I}}$ の恒等射 $\mathrm{id}_{\Delta(X)}$ に写されること $\Delta(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Delta(X)}$ である．

圏 $\mathscr{C}$ で $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ となっているとする．任意の $i \in \mathbf{I}$ に対して, $\Delta(g \circ f)$ の i 成分 $(\Delta(g \circ f))_i$ を考える．Δ の定義より,

$$(\Delta(g \circ f))_i = g \circ f = (\Delta(g))_i \circ (\Delta(f))_i = (\Delta(g) \circ \Delta(f))_i$$

である (最後の等式は, 自然変換の合成の定義を用いた)．$i \in \mathbf{I}$ は任意だから, $\Delta(g \circ f) = \Delta(g) \circ \Delta(f)$ が示された．

圏 $\mathscr{C}$ の対象 $X \in \mathscr{C}$ を任意に取る．上と同様に, 任意の $i \in \mathbf{I}$ に対して, $\Delta(\mathrm{id}_X)$ の i 成分 $(\Delta(\mathrm{id}_X))_i$ を考える．再び Δ の定義より

$$(\Delta(\mathrm{id}_X))_i = \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\Delta(X)(i)} = (\mathrm{id}_{\Delta(X)})_i$$

である (最後の等式は, 恒等自然変換の定義を用いた)．$i \in \mathbf{I}$ は任意だから, $\Delta(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Delta(X)}$ が示された．

以上より, Δ は関手であることが確認された．

(2) 対象 $X \in \mathscr{C}$ を頂点とする図式 D 上の錐 $\left(X \xrightarrow{\alpha_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}} \in \mathrm{Cone}(X,D)$ は, 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i,j)$ に対して以下の図式が可換になるものであった:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(f)"'] & & D(j) \end{tikzcd}$$

これは以下の可換図式でも書ける:

$$\begin{tikzcd} \Delta(X)(i) \arrow[r, "\Delta(X)(f)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & \Delta(X)(j) \arrow[d, "\alpha_j"] \\ D(i) \arrow[r, "D(f)"'] & D(j) \end{tikzcd}$$

これは, $\alpha = \left(\Delta(X)(i) \xrightarrow{\alpha_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}}$ が自然変換 $\Delta(X) \Rightarrow D \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathbf{I}}}(\Delta(X),D)$ になっていることを意味する．これより, $\mathrm{Cone}(X,D) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathbf{I}}}(\Delta(X),D)$ がわかる．

(3) 対象 $X \in \mathscr{C}$ を任意にとる．示すべきことは, 全単射 $\phi\colon \mathrm{Cone}(X,D) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)$ の存在である．以下, これを構成する．図式 D 上の極限錐を $\left(\varprojlim D \xrightarrow{p_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}}$ とする．

X を頂点とする錐 $\alpha = \left(X \xrightarrow{\alpha_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}} \in \mathrm{Cone}(X,D)$ が与えられたとき, $\phi(\alpha) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)$ を定めたい．極限の普遍性から, $\bar{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)$ で, 任意の $i \in \mathbf{I}$ に対して $\alpha_i = p_i \circ \bar{\alpha}$ となるものが一意的に存在するので, $\phi(\alpha) := \bar{\alpha}$ と定める．

一方, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)$ が与えられたとき, X を頂点とする図式 D 上の錐を構成する. 各 $i \in \mathbf{I}$ に対して $\beta_i := p_i \circ \beta$ と定める. このとき, 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i, j)$ に対して, 図式

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ddl, "\beta_i"'] \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "\beta_j"] & \\
 & \varprojlim D \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(f)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}
$$

は可換になる. 実際, $\left(\varprojlim D \xrightarrow{p_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}}$ が極限錐であることから $p_j = D(f) \circ p_i$ なので,

$$\beta_j = p_j \circ \beta = D(f) \circ p_i \circ \beta = D(f) \circ \beta_i.$$

よって, $\tilde{\beta} := \left(X \xrightarrow{\beta_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}}$ は X を頂点とする図式 D 上の錐であるから, 写像 $\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D) \to \mathrm{Cone}(X, D)$ を $\psi(\beta) := \tilde{\beta}$ と定める.

上で構成した写像 ϕ, ψ が互いに他の逆写像となること, すなわち,

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(X,D)}, \quad \phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)}$$

を示す. X を頂点とする錐 $\alpha = \left(X \xrightarrow{\alpha_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}} \in \mathrm{Cone}(X, D)$ を任意にとる. 定義より, $\phi(\alpha)$ は各 $i \in \mathbf{I}$ に対して $\alpha_i = p_i \circ \bar{\alpha}$ となる一意的な射 $\bar{\alpha}$ であり, $\psi(\bar{\alpha})$ は各 $i \in \mathbf{I}$ に対して $\bar{\alpha}_i := p_i \circ \bar{\alpha}$ と定めたときの X を頂点とする錐 $\tilde{\bar{\alpha}} = \left(X \xrightarrow{\bar{\alpha}_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}}$ である. 明らかに各 $i \in \mathbf{I}$ に対して $\bar{\alpha}_i = \alpha_i$ であるから, $\tilde{\bar{\alpha}} = \alpha$. ゆえに, $\psi(\phi)(\alpha) = \alpha$ がわかったので $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(X,D)}$.

一方, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)$ を任意にとる. 定義より, $\psi(\beta)$ は各 $i \in \mathbf{I}$ に対して $\beta_i := p_i \circ \beta$ と定めたときの X を頂点とする錐 $\tilde{\beta} = \left(X \xrightarrow{\beta_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}}$ であり, $\phi(\tilde{\beta})$ は各 $i \in \mathbf{I}$ に対して $\beta_i = p_i \circ \bar{\tilde{\beta}}$ となる一意的な射 $\bar{\tilde{\beta}}$ である. $\bar{\tilde{\beta}}$ の一意性より $\beta = \bar{\tilde{\beta}}$ が言えるので, $\phi(\psi)(\beta) = \beta$, すなわち, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)}$ がわかった.

以上より, 全単射 $\phi\colon \mathrm{Cone}(X, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)$ の存在が言えたので,

$$\mathrm{Cone}(X, D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)$$

である.

(4) 定義より, $\mathbf{I}$ の各対象 $i \in \mathbf{I}$ は $\mathbf{Set}$ の対象 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, D(i))$ に写っており, $\mathbf{I}$ の各射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i, j)$ は $\mathbf{Set}$ の射 $H^X(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(H^X(i), H^X(j))$ に写っていることがわかる. 示すべきことは, 関手が射の合成を保存すること (すなわち, $\mathbf{I}$ で $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ のとき $H^X(g \circ f) = H^X(g) \circ H^X(f)$ となること) と, $\mathbf{I}$ の各対象 i の恒等射 id_i が $\mathbf{Set}$ の恒等射 $\mathrm{id}_{H^X(i)}$ に写されること $H^X(\mathrm{id}_i) = \mathrm{id}_{H^X(i)}$ である.

圏 $\mathbf{I}$ で $i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k$ となっているとする．任意に $p \in H^X(i)$ をとる．このとき, H^X の定義と D の関手性より,

$$H^X(g \circ f)(p) = D(g \circ f) \circ p = D(g) \circ D(f) \circ p = \left(H^X(g) \circ H^X(f)\right)(p)$$

となる．p は任意だったから, $H^X(g \circ f) = H^X(g) \circ H^X(f)$.

圏 $\mathbf{I}$ の対象 $i \in \mathbf{I}$ と $p \in H^X(i)$ を任意に取る．H^X の定義と D の関手性より,

$$H^X(\mathrm{id}_i)(p) = D(\mathrm{id}_i) \circ p = \mathrm{id}_{D(i)} \circ p = p = \mathrm{id}_{H^X(i)}(p)$$

である．p は任意だったから, $H^X(\mathrm{id}_i) = \mathrm{id}_{H^X(i)}$.

以上より, H^X は関手であることが確認された.

(5) **Problem 1** で **Set** が完備であること, すなわち, 任意の小圏 $\mathbf{I}$ と任意の図式 $F \colon \mathbf{I} \to \mathbf{Set}$ に対して極限 $\varprojlim F$ が存在し, **Problem 1** (2) の同型が成立することを見た．とくに, 関手 $H^X \colon \mathbf{I} \to \mathbf{Set}$ も極限をもち,

$$\varprojlim H^X \cong \left\{ (\alpha_i)_{i \in \mathbf{I}} \in \prod_{i \in \mathbf{I}} H^X(i) \;\middle|\; \forall i, j \in \mathbf{I}, \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i, j), H^X(f)(\alpha_i) = \alpha_j \right\}$$

が成立する．$H^X(i) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, D(i))$ であるから, $(\alpha_i)_{i \in \mathbf{I}}$ は射の族 $\left(X \xrightarrow{\alpha_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}}$ である．さらに, $H^X(f)(\alpha_i) = D(f) \circ \alpha_i$ であるから,

$$\left\{ \left(X \xrightarrow{\alpha_i} D(i)\right)_{i \in \mathbf{I}} \;\middle|\; \forall i, j \in \mathbf{I}, \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i, j), D(f) \circ \alpha_i = \alpha_j \right\} = \mathrm{Cone}(X, D)$$

である．よって, $\mathrm{Cone}(X, D) \cong \varprojlim H^X$.

(6) (3) から (5) で示されたことの双対を考えることで, 任意の対象 $X \in \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X, \varprojlim D) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X, D(-))$$

が成立することがわかる．ところで, $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ の対象は $\mathscr{C}$ と同じである．また, $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ における極限 $\varprojlim D$ は, $\mathscr{C}$ における余極限 $\varinjlim D$ になるから,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X, \varprojlim D) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim D, X)$$

が成り立つ．さらに, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X, D(-)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D(-), X)$ である．以上より,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim D, X) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D(-), X)$$

が成立する． $\square$

Comment

テキストの §3 で自然変換が登場したので, 題材として既にやった極限を取り上げて問題を作成してみました．(結局, 自然変換に関してはあまり詳しく触れませんでしたが......) 表現可能関手と米田の補題のあたりの話題が出てくると良さそうだと思い, 表現可能関手が極限を保存することを示

す問題にしてみました．このあたりの話題に関しては圏論でよく見かけると思うので，一度何らかの書物で確認しておくと良いかもしれません．

実は，(6) は随伴の話にもつながる話題になっています．本当は，対角関手 Δ と極限/余極限に関してもう少し詳しく見れるとよかったのですが，問題が大変になってしまいそうだったので断念しました．(そのため，(2) 以降では対角関手が出てきておらず，(2) 以降で話題ががらっと変わってしまっています．あまりいい感じの問題構成ではなかったですね......)

(1) 関手の定義と自然変換の定義を確認するための問題です．Δ による写り先 (とくに射の写り先の $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$) が正しいか，射の合成を保存するか，恒等射が恒等射に写されるか，の三つを確認すれば良いです．一つ目については，定義から明らかです．残りは，自然変換の (垂直) 合成と，恒等自然変換の定義から示せます (自然変換の垂直合成と恒等自然変換に関しては，はじめの定義に書いておくべきでしたね)．

(2) 自然変換の定義を確認するための問題です．図式を書いてみると，自然に解答方針がわかると思います．

(3) まずは示すべきことをよく眺めると，「X を頂点とする錐が，X から極限 $\varprojlim D$ への射と 1 対 1 に対応する」ということを示せば良いことがわかります．極限の定義から，X を頂点とする錐が与えられたとき，図式を可換にする X から極限 $\varprojlim D$ への射が一意的に存在することがわかっているので，錐から射への写像は作れそうです．あとはこの逆写像を構成できればよいのですが，すこし図式を書いてみると，X から $\varprojlim D$ への射と $\varprojlim D$ から各対象への射を合成することで，X を頂点とする錐が構成できそうなことがわかります．最後に，今構成した写像はきちんと互いが他の逆になっていることを示せば OK です．

(4) 関手の定義を確認するための問題です．(1) と同様に示せば問題ありません．

(5) 左辺の $\mathrm{Cone}(X, D)$ については，集合の中身がわかると思います．では右辺の $\varprojlim H^X$ は何でしょうか? まずは，この $\varprojlim H^X$ がどんな集合になっているのかをはっきりさせるところから始めると良いです．幸いにも，**Problem 1** で **Set** での極限の集合を具体的に構成しているので，これを利用しましょう．あとは，この集合を解きほぐしていくと，自然と $\mathrm{Cone}(X, D)$ が現れます．

(6) 双対性を明示的に使ってみるための問題です．指示通り，既に示したことを使っていけば示せます．$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ での極限が $\mathscr{C}$ での余極限になっていることに気がつくのがポイントです．

Answer 3

(1) **$\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ が圏になっていること** $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ とし, 任意に

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(V_1, V_2),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(V_2, V_3),\ h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(V_3, V_4)$$

をとる. 写像の合成の性質より結合法則 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成立する. また, 任意の $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(V_1, V_2)$ に対し, 恒等写像 $\mathrm{id}_{V_1}, \mathrm{id}_{V_2}$ が恒等射であるから, $\mathrm{id}_{V_2} \circ f = f \circ \mathrm{id}_{V_1} = f$ が成立する. よって, $\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ は圏になっている.

Mat が圏になっていること $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbf{Mat}$ とし, 任意に

$$A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n_1, n_2),\ B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n_2, n_3),\ C \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n_3, n_4)$$

をとる. 行列積の性質より結合法則 $C(BA) = (CB)A$ が成立する. また, 任意の $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n_1, n_2)$ に対し, 単位行列 I_{n_1}, I_{n_2} が恒等射であるから, $I_{n_2}A = AI_{n_1} = A$ が成立する. よって, $\mathbf{Mat}$ は圏になっている.

(2) 定義より, $\mathbf{Mat}$ の各対象 $n \in \mathbf{Mat}$ は $\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ の対象 $F(n) = \mathbb{R}^n$ に写っており, $\mathbf{Mat}$ の各射 $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, m)$ は $\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ の射 $F(A) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(F(n), F(m))$ に写っていることがわかる. 示すべきことは, 関手が射の合成を保存すること (すなわち, $\mathbf{Mat}$ で $l \xrightarrow{A} m \xrightarrow{B} n$ のとき $F(BA) = F(B) \circ F(A)$ となること) と, $\mathbf{Mat}$ の各対象 n の恒等射 I_n が $\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ の恒等射 $\mathrm{id}_{F(n)}$ に写されること $F(I_n) = \mathrm{id}_{F(n)}$ である.

圏 $\mathbf{Mat}$ で $l \xrightarrow{A} m \xrightarrow{B} n$ となっているとする. F の定義から, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l$ に対して

$$F(BA)(\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x}) = F(B) \circ F(A)(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので, $F(BA) = F(B) \circ F(A)$.

圏 $\mathbf{Mat}$ の対象 $n \in \mathbf{Mat}$ を任意に取る. 上と同様に F の定義から, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$F(I_n)(\boldsymbol{x}) = I_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \mathrm{id}_{F(n)}(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{x}$ は任意なので, $F(I_n) = \mathrm{id}_{F(n)}$.

以上より, F は関手であることが確認された.

(3) $\phi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, m) \ni A \mapsto F(A) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ に対し, 逆写像を構成する. 線形写像 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ が与えられたとする. このとき, 標準基底に関する f の表現行列を A_f とすると, $A_f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, m)$ であり, $f(\boldsymbol{x}) = A_f\boldsymbol{x}$ が成立する. $\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni f \mapsto A_f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, m)$ と定める. このとき, $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ となるのは明らか. よって, 写像 ϕ は全単射.

(4) V には, 有限個の基底が存在するので, その個数を n とし, V の基底 $\{\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \,\}$ を任意に固定する. n は非負だから $n \in \mathbf{Mat}$. 写像 s_V を次で定義する: $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$s_V(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i.$$

$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$, $a, b \in \mathbb{R}$ とすると,

$$s_V\,(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + by_i)\boldsymbol{v}_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{v}_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{v}_i = as_V(\boldsymbol{x}) + bs_V(\boldsymbol{y})$$

なので, s_V は線形. また, $\{\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \,\}$ が基底なので, s_V は全射. さらに, $s_V(\boldsymbol{x}) = s_V(\boldsymbol{y})$ とすると,

$$\mathbf{0} = s_V(\boldsymbol{x}) - s_V(\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\boldsymbol{v}_i.$$

$\{\, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \,\}$ は基底で, とくに一次独立だから, 全ての i で $x_i - y_i = 0$. よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ なので s_V は単射. 以上より, s_V は同型写像.

(5) (4) より, 各 $V \in \mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ に対し, 非負整数 $n \in \mathbf{Mat}$ と線形同型 s_V が存在するので, $G(V) := n$, $\varepsilon_V := s_V$ と定める. また (3) より, $V, W \in \mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ に対し全単射 $\phi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(G(V), G(W)) \ni A \to F(A) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(F \circ G(V), F \circ G(W))$ が存在する. よって, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(V, W)$ に対して $F(\bar{f}) = \varepsilon_W^{-1} \circ f \circ \varepsilon_V$ となるような $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(G(V), G(W))$ が唯一つ存在する. よって, $G(f) := \bar{f}$ と定める. こうして定めた G は関手になる. これは, (2) と同様に示せる.

後は, $\varepsilon = (\varepsilon_V)_{V \in \mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}$ が自然同型になることを示す. 各 ε_V は同型射なので, 任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(V, W)$ に対して次の図式が可換になることを示せばよい:

$$\begin{array}{ccc}
(F \circ G)(V) & \xrightarrow{(F \circ G)(f)} & (F \circ G)(W) \\
\downarrow{\scriptstyle \varepsilon_V} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_W} \\
V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W
\end{array}$$

とくに, $(F \circ G)(f) = F(\bar{f})$ であるから, $\bar{f}$ の定め方よりこの図式は可換. よって, $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}$ が自然同型になっていることが示された.

(6) $n \in \mathbf{Mat}$ に対し, $\varepsilon_{F(n)}\colon (F \circ G \circ F)(n) \to F(n)$ は同型である. とくに, $(G \circ F)(n) = n$, $F(n) = \mathbb{R}^n$ なので, $\varepsilon_{F(n)} = \varepsilon_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(F(n), F(n))$ である.

(3) より, $X_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, n) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}((G \circ F)(n), n)$ で $F(X_n) = \varepsilon_{\mathbb{R}^n}$ となるものが一意的に存在する. 同様に, $Y_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, (G \circ F)(n))$ で $F(Y_n) = \varepsilon_{\mathbb{R}^n}^{-1}$ となるものが一意的に存在するが, F の関手性より

$$F(Y_n X_n) = F(Y_n)F(X_n) = \varepsilon_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ \varepsilon_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = F(I_n)$$

である. 再び (3) より, F は写像として単射だから, $Y_n X_n = I_n$. 同様に $X_n Y_n = I_n$ であるから, Y_n が同型射であることがわかった.

各 $n \in \mathbf{Mat}$ に対して, $\eta_n := Y_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, (G \circ F)(n))$ と定める. 各 η_n は同型射なの

で, 任意の射 $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, m)$ に対して次の図式が可換になることを示せばよい:

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\eta_n"] & m \arrow[d, "\eta_m"] \\
(G \circ F)(n) \arrow[r, "(G\circ F)(A)"] & (G \circ F)(m)
\end{tikzcd}$$

$F(A) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ であり, G の定義より $A' = (G \circ F)(A)$ は

$$F(A') = \varepsilon_{\mathbb{R}^m}^{-1} \circ F(A) \circ \varepsilon_{\mathbb{R}^n}$$

を満たす. η_n の定義と F の関手性より,

$$F(A') = F(\eta_m) \circ F(A) \circ F(\eta_n^{-1}) = F(\eta_m A \eta_n^{-1})$$

であるが, F が写像として単射なので, $A' = \eta_m A \eta_n^{-1}$. よって図式は可換となり, $\eta = (\eta_n)_{n \in \mathbf{Mat}} \colon \mathrm{id}_{\mathbf{Mat}} \Rightarrow G \circ F$ は自然同型である. □

Comment

圏同値が圏同型よりも使いやすいものだということを見るために, 具体的な例を使って確認してみようという気持ちで作った問題です. 線形代数なら前提知識として仮定しても良いかと思って, このような題材にしました. 線形写像と行列が一対一に対応するという線形代数で勉強する事実が, 圏同値で表現できるのは面白いと思います. 当初は, ベクトル空間の双対をとる操作などについても問題を作るつもりだったのですが, 時間の都合で断念しました.

ところで, 上の解答では $n = 0 \in \mathbf{Mat}$ に関しては真面目に考えずにごまかしてしまっています (とくに (4) では基底をとっていますが......). $n = 0$ のときについていろいろ考えてみると, だんだん不思議な気分になってきますが, これは空写像などを考えるときの感覚に似ていますね.

(1) 圏の定義を確認するための問題です. 定義通り確認すれば大丈夫です.

(2) 関手の定義を確認するための問題です. **Problem 2** で確認したようにやれば問題ありません.

(3) F が充満忠実であることを言うためだけに設置した問題です. 示す内容自体は, 線形代数でやった「線形写像 $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と, 行列 $A \in M_{m,n}$ に 1 対 1 対応がつくれる」ということなので, これを念頭において示すと良いでしょう.

(4)「ベクトル空間 V が n 次元のとき, $V \cong \mathbb{R}^n$ である」という内容を示すことになります. V の基底を選んでやると任意のベクトルが基底の線形結合で表せるようになりますが, このときの各基底の係数の組を $\mathbb{R}^n$ の元だと思うことで同型写像が作れます. ここで利用する基底は, 正規直交基底に限らず, どのような基底でも構いません.

(5)「関手 F が充満忠実のとき, F が本質的に全射ならば F の準逆関手 G を構成できる」という命題の前半です. 解答では, 基底を明示的に出さないような証明をしています. というのも, 線形写像の表現行列は基底の選択に依存しているので, この取扱いが面倒だと思ったからです. 自然同型の定義を書いておくべきでした.

(6) (5) の続きです．これも, (5) と同様の理由で基底を明示的に使わない証明をしました．F の写像としての単射性をうまくつかって, η を構成しています．また, 途中で「F が充満忠実で $F(f)$ が同型射なら, f も同型射」という主張を示しています.