第 4 回の演習問題

Takahiro INOUE

問題は全部で 3 問あります. なお, **Problem 3** のみ線形代数の知識を仮定します. 以下に, **Problem 2, 3** を解くのに必要な自然変換と関手圏の定義を記しておきます.

Definition 1 (自然変換)
圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への二つの関手 $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ に対し, F から G への**自然変換** (natural transformation) $\alpha\colon F \Rightarrow G$ とは, $\mathscr{D}$ の射の族 $(\alpha_X\colon F(X) \to G(X))_{X \in \mathscr{C}}$ であって, 各 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_X} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

が可換になるものをいう. 射 α_X は自然変換 α の**成分** (component) という. □

Definition 2 (関手圏)
圏 $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ に対して $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ を, 対象が圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{D}$ への関手で, 射が対象 F から対象 G への自然変換である圏とする[*1]. これを**関手圏** (functor category) という. □

問題に不備や質問があれば, お問い合わせください.

[*1] これが圏になることは, 一度確認しておくと良い.

Problem 1 (Set の極限・余極限)

集合の圏 **Set** が完備・余完備であることを, 実際に極限・余極限を構成することで確認しよう[*2].

以下では, $\mathbf{I}$ を任意の小圏[*3]とし, 任意に $\mathbf{I}$ 上の図式 $D\colon \mathbf{I} \to \mathbf{Set}$ を固定する. 小圏 $\mathbf{I}$ の対象 $i \in \mathbf{I}$ に対し $X_i := D(i)$, 小圏 $\mathbf{I}$ の射 f に対し $m_f := D(f)$ と表記する. 直積 $\prod_{i\in\mathbf{I}} X_i = \{ (x_i)_{i\in\mathbf{I}} \mid x_i \in X_i \}$ の射影を $\pi_j((x_i)_{i\in\mathbf{I}}) = x_j$ とし, 直和 $\coprod_{i\in\mathbf{I}} X_i = \{ (i, x_i) \mid i \in \mathbf{I}, x_i \in X_i \}$ への余射影を $x_j \in X_j$ に対して $\iota_j(x_j) = (j, x_j)$ と書く.

(1) 任意の集合 X, Y と写像 $f, g\colon X \to Y$ に対して, **Set** における f, g のイコライザ $\mathrm{Eq}(f, g)$ を求めよ.

(2) 直積とイコライザを用いて **Set** における図式 D の極限 $\varprojlim D$ を構成し, 次の同型

$$\varprojlim D \cong \left\{ (x_i)_{i\in\mathbf{I}} \in \prod_{i\in\mathbf{I}} X_i \;\middle|\; \forall i, j \in \mathbf{I}, \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i, j), m_f(x_i) = x_j \right\}$$

を示せ.

(3) 任意の集合 X, Y と写像 $f, g\colon X \to Y$ に対して, **Set** における f, g の余イコライザ $\mathrm{Coeq}(f, g)$ を求めよ.

(4) 直和 $\coprod_{i\in\mathbf{I}} X_i$ における二項関係 $R \subseteq \left(\coprod_{i\in\mathbf{I}} X_i\right)^2$ を,

$$R := \{ (\iota_i(x_i), \iota_j(x_j)) \mid \exists f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i, j), m_f(x_i) = x_j \}$$

で定義し, R を含む最小の同値関係を $\sim_R$ とする[*4]. 直和と余イコライザを用いて **Set** における図式 D の余極限 $\varinjlim D$ を構成し, 次の同型

$$\varinjlim D \cong \left(\coprod_{i\in\mathbf{I}} X_i \right) \Big/ {\sim_R}$$

を示せ.

[*2] 要するに, 演習問題 3 の 2 の一般化をする.

[*3] $\mathbf{I}$ が小圏であるとは, 圏の射の集まりが集合になることをいう.

[*4] つまり, $\iota_i(x_i) \sim_R \iota_j(x_j)$ となるのは, ある $\iota_i(x_i) = a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = \iota_j(x_j)$ となる a_k で, 各 k に対して $a_k \, R \, a_{k+1}$ または $a_{k+1} \, R \, a_k$ となるものが存在するとき.

Problem 2 (自然変換と極限)

ここでは自然変換を用いて, 極限について調べることにする. 小圏 $\mathbf{I}$ と局所小圏[*5]$\mathscr{C}$ を考える. 対象 $X \in \mathscr{C}$ に対して, 関手 $\Delta(X) \colon \mathbf{I} \to \mathscr{C}$ を次で定める[*6]:

$$\Delta(X)(i) := X \quad (i \in \mathbf{I})$$
$$\Delta(X)(f) := \mathrm{id}_X \quad (f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i, j))$$

すると, $\mathscr{C}$ から $\mathscr{C}^{\mathbf{I}}$ への関手 $\Delta \colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathbf{I}}$ が得られる ($f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ に対して, $\Delta(f)$ は各 $i \in \mathbf{I}$ に対する成分が $(\Delta(f))_i = f$ となる自然変換 $\Delta(f) : \Delta(X) \Rightarrow \Delta(Y)$ である).

(1) Δ が関手になっていることを確認せよ[*7].

図式 $D \colon \mathbf{I} \to \mathscr{C}$ を任意に固定する. 対象 $X \in \mathscr{C}$ を頂点とする図式 D 上の錐全体の集合を $\mathrm{Cone}(X, D)$ と書く.

(2) $\mathrm{Cone}(X, D) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathbf{I}}}(\Delta(X), D)$ となることを示せ.

これより, X を頂点とする錐を自然変換 $\Delta(X) \Rightarrow D$ と見なせることがわかった. 以下, 圏 $\mathscr{C}$ は $\mathbf{I}$ 型図式の極限/余極限をもつとする.

(3) 任意の対象 $X \in \mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{Cone}(X, D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D)$ が成立することを示せ.

対象 $X \in \mathscr{C}$ に対して, 関手 $H^X \colon \mathbf{I} \to \mathbf{Set}$ を次で定める:

$$H^X(i) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, D(i)) \quad (i \in \mathbf{I})$$
$$H^X(f) \colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, D(i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, D(j));\ p \mapsto D(f) \circ p \quad (f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{I}}(i, j)).$$

(4) H^X が関手になっていることを確認せよ.
(5) 任意の対象 $X \in \mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{Cone}(X, D) \cong \varprojlim H^X$ が成立することを示せ.

とくに, $H^X = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, D(-))$ と表すと, (3), (5) より

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varprojlim D) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, D(-))$$

が成立する. すなわち, 関手 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, -) \colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ は極限を保存することがわかった.

一方で, 余極限については同様のことが成立するとは限らない. 以上の (3) から (5) での議論の双対をとろう. つまり, $\mathscr{C}$ を $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ に置き換えて, 図式 D は $D \colon \mathbf{I} \to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で考える.

(6) 対象 $X \in \mathscr{C}$ に対して関手 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D(-), X) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(X, D(-)) \colon \mathbf{I} \to \mathbf{Set}$ が定義できる. 任意の対象 $X \in \mathscr{C}$ に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim D, X) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(D(-), X)$ が成立することを示せ.

[*5] $\mathscr{C}$ が局所小圏であるとは, 圏の任意の対象 $A, B \in \mathscr{C}$ に対して, 射の集まり $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ が集合になることをいう. ここでは, あまり気にしないでも良い.

[*6] $\Delta(X)$ を X に値を取る**定数関手** (constant functor) という. $\Delta(X)$ が関手になっていることは, 容易に確認できる.

[*7] この関手 Δ を**対角関手** (diagonal functor) という.

Problem 3 ($\mathbb{R}$ **上の有限次元ベクトル空間の圏)**

$\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ を体 $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間の圏, すなわち, 対象が体 $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間全体で, 対象 $V, W \in \mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ に対して V から W への射の集まりが集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(V, W) := \left\{ f\colon V \to W,\ f \text{ は線形写像} \right\}$$

である圏とする (射の合成は写像の合成, 恒等射は恒等写像とする). また, $\mathbf{Mat}$ を, 対象が非負整数全体 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で, 対象 $n, m \in \mathbf{Mat}$ に対して n から m への射の集まりが集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, m) = M_{m,n}(\mathbb{R}) = \{ m \times n \text{ 実行列全体} \}$$

である圏とする (射の合成は行列積, 恒等射は単位行列とする).

(1) $\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ と $\mathbf{Mat}$ が圏になっていることを確認せよ.

関手 $F\colon \mathbf{Mat} \to \mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ を次で定める:

$$\begin{aligned} &F(n) := \mathbb{R}^n \quad (n \in \mathbf{Mat}) \\ &F(A)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m;\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \quad (A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, m)). \end{aligned}$$

(2) F が関手になっていることを確認せよ.
(3) 任意の $n, m \in \mathbf{Mat}$ に対し, 写像 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mat}}(n, m) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}(F(n), F(m));\ A \mapsto F(A)$ が全単射になることを示せ[*8].
(4) 任意の $V \in \mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}$ に対し, 非負整数 $n \in \mathbf{Mat}$ と線形写像 $s_V\colon F(n) \to V$ が存在して, s_V が同型写像になることを示せ[*9].
(5) 関手 $G\colon \mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Mat}$ と自然変換 $\varepsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{FDVec}_{\mathbb{R}}}$ で, ε が自然同型になるものが存在することを示せ.
(6) 自然同型 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Mat}} \Rightarrow G \circ F$ を構成し, F が圏同値を与えることを示せ.

こうして, 線形写像を考えることと行列を考えることは同等であることがわかった. とくに, 上で構成したものは圏同値であり, 圏同型ではないことに注意する.

[*8] このとき, 関手 F は**充満** (full) かつ**忠実** (faithful) であるという.
[*9] このとき, 関手 F は**本質的に全射である** (essentially surjective) であるという.