Ch.2 確率分布と期待値

§2.1 確率変数

Def. (確率変数)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: prob.sp.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$: 確率変数 (r.v.)

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ X : m'ble, i.e., $\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X^{-1}(I) \in \mathcal{F}$. $\square$

Def. (累積分布函数)

X : r.v. の 累積分布函数 (cdf)

$F_X(x) := P(X \leq x)$. $(x \in \mathbb{R})$ $\square$

Th. $F(x)$ がある r.v. の cdf.

$\Leftrightarrow$ (1) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

(2) $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$. (非減少)

(3) $F(x)$ は右連続. $\square$

§2.2 確率関数と確率密度関数.

<u>Def.</u> (確率関数)

X : discrete r.v. の**確率関数** (pmf) :

$$f_X(x) = P(X = x).$$

$\square$

<u>Def.</u> (確率密度関数)

X : continuous r.v. に対し,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

なる関数 f_X が存在するとき, これを X の**確率密度関数** (pdf) という.

$\square$

・ $f_X(x) = \dfrac{d}{dx} F_X(x).$

<u>Def.</u> (分位点)

$y \in (0,1)$, $F_X(x_y) = y$ をみたす x_y を**分位点** (quantile) という.

$\square$

§2.3 期待値.

<u>Def.</u> (期待値)

$g(X)$ の**期待値** (expectation) を

$$\mathbb{E}[g(X)] := \int g(x) f_X(x)\, d\mu_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx & X : \text{cont.} \\ \sum_x g(x) f_X(x) & X : \text{disc.} \end{cases}$$

で定義. $\square$

- X の**平均** : $\mathbb{E}[X]$
- X の**分散** : $\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
- X の**標準偏差** : $SD[X] := \sqrt{\mathbb{V}[X]}$.
- **変動係数** : $C.V. := \dfrac{SD[X]}{\mathbb{E}[X]}$

<u>Prop.</u> a, b, c : const.

(1) $\mathbb{E}[c] = c$.

(2) $\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)]$

(3) $\forall x,\ g(x) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[g(X)] \geq 0$

(4) $\left| \mathbb{E}[g(X)] \right| \leq \mathbb{E}[|g(X)|]$.

(5) X, Y : indep. $\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. $\square$

Prop. (1) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

$$= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2. \quad \square$$

(2) $\mathbb{V}[aX+b] = a^2\mathbb{V}[X]$.

・ $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathbb{V}[X]$.

$$Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \quad (X\text{の標準化})$$

とすると、$\mathbb{E}[Z] = 0$, $\mathbb{V}[Z] = 1$.

Def. (歪度, 尖度)

$$\beta_1 := \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} \quad : \text{歪度 (skewness)}$$

$$\beta_2 := \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} \quad : \text{尖度 (kurtosis)} \quad \square$$

Def. (モーメント)

$\mu'_k := \mathbb{E}[X^k]$: 原点まわりの k 次モーメント (moment)

$\mu_k := \mathbb{E}[(X-\mu)^k]$: 平均まわりの k 次モーメント

$\mathbb{E}[\underbrace{X(X-1)\cdots\cdots(X-k+1)}_{k\text{コ}}]$: k 次階乗モーメント (factorial moment)

$\square$

§2.4 確率母関数, モーメント母関数, 特性関数.

・確率分布を特徴付ける関数.

確率分布 $\leftrightarrow$ 確率母関数, モーメント母関数, 特性関数.
1対1対応

Def. (確率母関数)

$X : \Omega \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p(k) := P(X=k)$.

$|s| \leq 1$ に対し,

$$G_X(s) := \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(k)$$

を確率母関数 (pgf) という. $\square$

Prop. $p(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} G_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0)$.

$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1)$. $\square$

Def. (モーメント母関数, 特性関数)

$\exists h>0, \forall t, |t|<h \Rightarrow M_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$.

このとき, $M_X(t)$ を, X のモーメント母関数 (mgf) という. また,

$$\phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}]$$

を X の特性関数 (cf) という. $\square$

- $\phi_X(t) = M_X(it)$.
- cf は常に存在. ($|\phi_X(t)| \leq 1$).
- mgf は分布によっては存在しない.

<u>Prop.</u> (1) $\mathbb{E}[X^k] = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0} = M_X^{(k)}(0)$

$$= \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{dt^k}\phi_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{i^k}\phi_X^{(k)}(0)$$

(2) $\phi_{aX+b}(t) = e^{bit}\phi_X(ait)$. $\square$

<u>Def.</u> (キュムラント母関数)

$\psi_X(t) := \log \phi_X(t)$ を X の キュムラント母関数 (cgf)

という.

$$\psi_X(t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(it)^k}{k!}\gamma_k + o(t^r)$$

と展開したとき, γ_k を k 次キュムラント という. $\square$

- $\phi_X(t)$: $f_X(t)$ の Fourier 変換に対応.

<u>Th.</u> (Levy の反転公式)

$F_X(x)$ の連続点 $a < b$ に対し.

$$P(a < X < b) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\phi_X(t)\,dt.$$

$\square$

<u>Th.</u> (連続性定理)

$\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$: r.v. 列.

$\lim_{k\to\infty} \phi_{X_k}(t) = \phi_X(t)$: 各点収束.

$\Rightarrow$ $\phi_X(t)$ に対応する分布函数を $F_X(t)$ とすると,

F_X の全ての連続点 x で,

$$\lim_{k\to\infty} F_{X_k}(x) = F_X(x).$$

$\square$

§2.5 変数変換.

・ $Y = g(X)$. X の分布 : given.

Y の分布?

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \in \{x \mid g(x) \leq y\})$$

・ X : cont.

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} P(X \in \{x \mid g(x) \leq y\})$$

g : 単調増加. $\Rightarrow$ g^{-1} が存在.

$$\{x \mid g(x) \leq y\} = \{x \mid x \leq g^{-1}(y)\}.$$

$$\therefore F_Y(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)\,dx.$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y).$$

$g(g^{-1}(y)) = y$ なので

$$\frac{d}{dy} g(g^{-1}(y)) = 1$$

$$(\text{l.h.s.}) = g'(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y).$$

$$\therefore f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}.$$

g が単調減少でも同様.

Th. X : r.v. $f_X(x)$: pdf. $Y = g(X)$.

g : 単調増加/減少. $g^{-1}(y)$: 微分可能.

$\Rightarrow$ Y の pdf は

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}.$$

$\square$

Cor. (確率積分変換)

X : cont. r.v. $F_X(x)$: X の cdf. $Y = F_X(X)$.

$\Rightarrow$ Y の pdf は $f_Y(y) = 1$ $(0 < y < 1)$,

i.e., $Y \sim U(0,1)$.

$\square$

Cor. (位置尺度分布族)

Z : cont. r.v. $f(z)$: Z の pdf.

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$, $X = \sigma Z + \mu$ とする.

$\Rightarrow$ X の pdf は $f_X(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

これは, 位置母数 μ, 尺度母数 σ をもつ

位置尺度分布族 とよばれる.

$\square$

・ g が単調でないときは がんばる.

Prop. (平方変換)

X : r.v. $f_X(x)$: Xのpdf. $Y = X^2$

$\Rightarrow$ Yのpdfは

$$f_Y(y) = \left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

$\square$