Ch.3 代表的な確率分布

§3.1 離散確率分布

X : disc. r.v.

3.1.1 離散一様分布.

Def. (離散一様分布)

$$N \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad P(X=x \mid N) = \frac{1}{N}, \quad x = 1, 2, \cdots, N$$

のとき, X は $\{1, 2, \cdots, N\}$ 上の一様分布に従うといい

$X \sim DU(N)$ とかく. $\square$

・ $X \sim DU(N)$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=1}^{N} x \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x=1}^{N} x^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12}.$$

3.1.2 2項分布.

・ Bernoulli試行：

確率pで"成功"，確率$1-p$で"失敗"する実験を行うこと.

<u>Def.</u>（Bernoulli分布）

$p \in (0,1)$.

$$P(X=x|p) = \begin{cases} p & (x=1) \\ 1-p & (x=0) \end{cases}$$

のとき，XはパラメータpのBernoulli分布に従うといい，

$X \sim B(1,p)$ と書く. □

・ $\mathbb{E}[X]=p$, $\mathbb{E}[X^2]=p$, $\mathbb{V}[X]=p(1-p)$

<u>Def.</u>（2項分布）

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $p \in (0,1)$. $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} B(1,p)$ $(i=1,\cdots,n)$.

このとき $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ とすると，

$$P(Y=k|n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n)$$

であり，Yはパラメータ(n,p)の2項分布に従うといい，

$Y \sim B(n,p)$ と表す. □

Prop. $X \sim B(n,p)$. $\mathbb{E}[X] = np$. $\mathbb{V}[X] = np(1-p)$.

pgf : $G_X(s) = (ps + 1 - p)^n$

mgf : $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$

cf : $\phi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$. $\square$

pf. $$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{x=0}^{n} s^x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (ps)^x (1-p)^{n-x}$$

$$= (ps + 1 - p)^n.$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = G_X(e^t) = (pe^t + 1 - p)^n.$$

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = M_X(it) = (pe^{it} + 1 - p)^n.$$

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = n(ps + 1 - p)^{n-1} p \Big|_{s=1} = np.$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = G_X''(1) = n(n-1)(ps + 1 - p)^{n-2} p^2 \Big|_{s=1}$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$

$$= np(1-p).$$ ▨

3.1.3 Poisson分布.

・まれな現象の大量観測によって発生する現象の個数の分布.

Def. (Poisson分布)

$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. X: r.v. で

$$P(X=k\mid\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0.1.2,\cdots)$$

のとき, Xは強度パラメータλの Poisson分布 に従うといい,

$X \sim Po(\lambda)$ で表す. $\square$

Prop. $X \sim Po(\lambda)$ $\mathbb{E}[X]=\lambda$ $\mathbb{V}[X]=\lambda$

pgf: $G_X(s) = e^{(s-1)\lambda}$

mgf: $M_X(t) = \exp((e^t-1)\lambda)$

cf: $\phi_X(t) = \exp((e^{it}-1)\lambda)$ $\square$

pf. $G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda s} = e^{(s-1)\lambda}.$$

$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = G_X(e^t) = e^{(e^t-1)\lambda}.$

$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = M_X(it) = e^{(e^{it}-1)\lambda}.$

$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = e^{(s-1)\lambda}\cdot\lambda\Big|_{s=1} = \lambda.$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = G_X''(1) = \lambda^2 e^{(s-1)\lambda}\Big|_{s=1} = \lambda^2.$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

▨

Lem. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ が $a_n \to a \ (n\to\infty)$ となるとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = e^a.$$

Th. (Poissonの少数法則)

B(n,pₙ)の平均

$$X_n \sim B(n, p_n).\quad X \sim Po(\lambda).\quad np_n = \lambda.$$

$$\Rightarrow\ n\to\infty\ (p_n \to 0)\ \text{とすると，}\quad X_n \xrightarrow{d} X.$$

□

Remark 「発生確率が小さく，例数が多い場合，2項分布はPoisson分布で近似できる」ということ．

pf. $$\phi_{X_n}(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = \left(\frac{\lambda}{n}e^{it} + 1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda(e^{it}-1)}{n}\right)^n$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda(e^{it}-1)} = \phi_X(t).$$

連続性定理より成立．

▨

3.1.4 幾何分布

・ Bernoulli試行が初めて成功するまでに要した失敗の数の分布.

Def. (幾何分布)

$p \in (0,1)$.

$$P(X=k|p) = p(1-p)^k \qquad (k=0,1,\cdots)$$

のとき, Xはパラメータpの**幾何分布**に従うという.

$X \sim Ge(p)$とかく. $\square$

Prop. $q=1-p$. $X \sim Ge(p)$.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{q}{p}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{q}{p^2}$$

$$G_X(s) = \frac{p}{1-qs} \qquad \left(s<\frac{1}{q}\right).$$

pf.
$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p(1-p)^x = p\sum_{x=0}^{\infty}(qs)^x$$

$$= \frac{p}{1-qs} \qquad (qs<1)$$

$$G_X'(s) = \frac{pq}{(1-qs)^2}. \quad \mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \frac{q}{p}.$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = G_X''(1) = \left.\frac{2pq^2}{(1-qs)^3}\right|_{s=1} = \frac{2q^2}{p^2}.$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \qquad \blacksquare$$

Prop. (幾何分布の無記憶性)

$s,t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $X \sim Ge(p)$.

$$P(X \geq s+t \mid X \geq s) = P(X \geq t). \qquad \square$$

pf.
$$P(X \geq s) = \sum_{x=s}^{\infty} p(1-p)^x = (1-p)^s \sum_{x=s}^{\infty} p(1-p)^{x-s}$$
$$= (1-p)^s \sum_{x'=0}^{\infty} p(1-p)^{x'} = (1-p)^s.$$

$$\therefore P(X \geq s+t \mid X \geq s) = \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s} = (1-p)^t = P(X \geq t).$$

$\blacksquare$

3.1.5 負の2項分布.

- Bernoulli試行で r回成功するまでの失敗回数の従う分布.

Def. (負の2項分布)

total r+k回のうち, はじめの r+k−1回の中で成功は r−1回, 失敗は k回, 最後は成功.

$p \in (0,1)$. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$.

$$P(X=k \mid r,p) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k \quad (k=0,1,\cdots)$$

のとき, X は**負の2項分布**に従うという.

$X \sim NB(r,p)$ と表す.

$\square$

Prop. $X \sim NB(r,p)$. $q = 1-p$.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{rq}{p}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{rq}{p^2}. \quad G_X(s) = \left(\frac{p}{1-sq}\right)^r \quad \left(s < \frac{1}{q}\right).$$

$\square$

pf.
$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x$$

$$= \left(\frac{p}{1-sq}\right)^r \sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{x} (1-sq)^r (sq)^x = \left(\frac{p}{1-sq}\right)^r.$$

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \frac{rq}{1-sq}\left(\frac{p}{1-sq}\right)^r \Bigg|_{s=1} = \frac{rq}{p}.$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = G_X''(1) = \left(\frac{rq^2}{(1-sq)^2} + \frac{r^2q^2}{(1-sq)^2}\right)\left(\frac{p}{1-sq}\right)^r \Bigg|_{s=1}$$

$$= \frac{rq^2}{p^2} + \frac{r^2q^2}{p^2} = \frac{r(r+1)q^2}{p^2}$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \frac{r(r+1)q^2}{p^2} + \frac{rq}{p} - \left(\frac{rq}{p}\right)^2 = \frac{rq}{p^2}$$

$\blacksquare$

3.1.6. 超幾何分布.

K個の"成功"状態をもつN個の要素からなる母集団から n個の要素を非復元抽出するときの，成功回数 X の分布.

<u>Def.</u> (超幾何分布)

$N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $K \in \{0,1,\cdots,N\}$, $n \in \{0,1,\cdots,N\}$.

$$P(X=k \mid N,K,n) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k=0,\cdots,n)$$

のとき，X は超幾何分布に従うといい，

$X \sim HG(N,K,n)$ とかく. $\square$

<u>Prop.</u> $X \sim HG(N,K,n)$.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{nK}{N}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{N-n}{N-1} n \frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right). \quad \square$$

pf.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \frac{\frac{K!}{x!(K-x)!}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{\frac{K!}{(x-1)!(K-x)!}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{\frac{K!}{x!(K-x-1)!}\binom{N-K}{n-x-1}}{\binom{N}{n}} \qquad (x \leftarrow x-1)$$

$$= K \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{K-1}{x}\binom{N-K}{n-x-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$= K \frac{n}{N} \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{K-1}{x}\binom{(N-1)-(K-1)}{n-1-x}}{\binom{N-1}{n-1}}$$

$$= \frac{nK}{N} \sum_{x=0}^{n} P(X=x \mid N-1, K-1, n-1)$$

$$= \frac{nK}{N}.$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{\frac{K!}{(x-2)!(K-x)!}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{\frac{K!}{x!(K-x-2)!}\binom{N-K}{n-x-2}}{\binom{N}{n}} \qquad (x \leftarrow x-2)$$

$$= K(K-1)\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1} \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{K-2}{x}\binom{(N-2)-(K-2)}{n-2-x}}{\binom{N-2}{n-2}}$$

$$= K(K-1)\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2$$

$$= K(K-1)\frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1} + \frac{nK}{N} - \frac{n^2K^2}{N^2}$$

$$
= n\frac{K}{N}\left((K-1)\frac{n-1}{N-1}+1-\frac{nK}{N}\right)
$$

$$
= n\frac{K}{N}\frac{1}{N(N-1)}\left(N(K-1)(n-1)+N(N-1)-nK(N-1)\right)
$$

$$
= n\frac{K}{N}\frac{1}{N(N-1)}\left(N^2-NK-nN+nK\right)
$$

$$
= n\frac{K}{N}\frac{1}{N(N-1)}\left(N(N-K)-n(N-K)\right)
$$

$$
= \frac{N-n}{N-1}\,n\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right). \qquad \blacksquare
$$

Prop. (二項近似)

無限個あれば
復元抽出と
実質同じ

$HG(N,K,n)$ について、$p := \frac{K}{N}$ とおくと、

$$
HG(N,K,n) \xrightarrow{d} B(n,p) \quad (\text{as } N\to\infty) \qquad \square
$$

pf.

$$
P(X=k\mid N,K,n) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}
$$

$$
= \frac{\dfrac{K!}{k!(K-k)!}\,\dfrac{(N-K)!}{(n-k)!(N-K-n+k)!}}{\dfrac{N!}{n!(N-n)!}}
$$

$$
= \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{\overbrace{K(K-1)\cdots(K-k+1)}^{k\text{項}}\cdot\overbrace{(N-K)(N-K-1)\cdots(N-K-n+k+1)}^{n-k\text{ 項}}}{\underbrace{N(N-1)\cdots(N-n+1)}_{n\text{項}}}
$$

$$
= \binom{n}{k}\frac{\frac{K}{N}\left(\frac{K}{N}-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(\frac{K}{N}-\frac{k-1}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(1-\frac{K}{N}-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{K}{N}-\frac{n-k-1}{N}\right)}{1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}
$$

$$
\xrightarrow[N\to\infty]{} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \blacksquare
$$

§3.2 連続分布.

3.2.1 一様分布.

Def. (一様分布)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. X の pdf が…

$$f_X(x \mid a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (x \in [a,b]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

のとき, X は $[a,b]$ 上の一様分布に従うといい,

$X \sim U(a,b)$ とかく. $\square$

Prop. $X \sim U(a,b)$,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad \square$$

pf.

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$= \frac{a+b}{2}.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(b^3-a^3) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}.$$

▨

3.2.2 正規分布.

Def. (正規分布)

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. X の pdf が

$$f_X(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

のとき, X は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従うといい,

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とかく. $\square$

・ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ に対し, 標準化変換

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

を施すと, Z の pdf は

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = N(0, 1)$$

となる. $N(0,1)$ を標準正規分布という.

・ 標準正規分布の cdf を

$$\Phi(z) := \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\,dt$$

と書く.

・ $f_Z(t)$ の対称性より

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}, \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

Prop. $Z \sim N(0,1)$. $\mathbb{E}[Z]=0$, $\mathbb{V}[Z]=1$.

$M_Z(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. $\phi_Z(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$. $\square$

pf. $M_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2 + tz\right) dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2 + \frac{t^2}{2}\right) dz$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-t)^2\right) dz = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

$\phi_Z(t) = M_Z(it) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$\mathbb{E}[Z] = M_Z'(0) = te^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = 0$.

$\mathbb{E}[Z^2] = M_Z''(0) = \left(e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{\frac{t^2}{2}}\right)\Big|_{t=0} = 1$. $\blacksquare$

Prop. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $\mathbb{E}[X]=\mu$. $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$

$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$. $\phi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$. $\square$

pf. $X = \sigma Z + \mu$.

$\therefore \mathbb{E}[X] = \sigma \mathbb{E}[Z] + \mu = \mu$. $\mathbb{V}[X] = \sigma^2 \mathbb{V}[Z] = \sigma^2$.

$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{t\sigma Z} e^{t\mu}] = e^{t\mu} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

$$\phi_X(t) = M_X(it) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \qquad \blacksquare$$

<u>Prop.</u>（再生性）

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2),\ Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2),\ X \perp\!\!\!\perp Y.$$

$$\Rightarrow X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2). \qquad \square$$

pf.

$$M_X(t) = \exp\left(\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}\right)$$

$$M_Y(t) = \exp\left(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right)$$

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}]$$

$$= M_X(t) M_Y(t)$$

$$= \exp\left((\mu_X + \mu_Y)t + \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{2} t^2\right)$$

$$\therefore X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2). \qquad \blacksquare$$

<u>Prop.</u> $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$ $\square$

pf. 略. $\blacksquare$

3.2.3 ガンマ分布. カイ2乗分布.

Def. (ガンマ分布) $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

$\alpha > 0, \beta > 0$. X の pdf が

$$f_X(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (x > 0)$$

のとき, X は形状母数 α, 尺度母数 β の ガンマ分布 に従う

といい, $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ と書く.

Prop. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$.

$\mathbb{E}[X] = \alpha\beta$, $V[X] = \alpha\beta^2$, $M_X(t) = \frac{1}{(1-t\beta)^\alpha}$.

pf. $$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{t\beta y} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad \left(y = \frac{x}{\beta}\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-(1-t\beta)y} dy$$

$$= \frac{1}{(1-t\beta)^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi \quad (\xi = (1-t\beta)y)$$

$$= \frac{1}{(1-t\beta)^\alpha}.$$

$$M_X'(t) = \alpha\beta(1-t\beta)^{-\alpha-1}$$

$$M_X''(t) = \alpha\beta^2(\alpha+1)(1-t\beta)^{-\alpha-2}$$

$$\mathbb{E}[X] = M_X'(0) = \alpha\beta.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = \alpha\beta^2(\alpha+1).$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \alpha\beta^2(\alpha+1) - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2. \qquad ▨$$

<u>Prop.</u> (再生性)

$X \sim Ga(a,\lambda)$, $Y \sim Ga(\beta,\lambda)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

$\Rightarrow X+Y \sim Ga(a+b,\lambda)$. □

pf. mgf. を考えれば分かる. ▨

<u>Def.</u> (Erlang分布).

$X \sim Ga(n,\lambda)$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ のとき. Xは位相nの

Erlang分布に従うといい, $X \sim Er(n,\lambda)$ とかく. □

<u>Def.</u> (カイ2乗分布)

$X^2 \sim Ga(\frac{n}{2}, 2)$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ のとき, Xは自由度nの

カイ2乗分布に従うといい, $X^2 \sim \chi_n^2$ とかく. □

・ $X^2 \sim \chi_n^2$ のとき、X^2 の pdf. は、

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}}. \quad (x>0)$$

<u>Prop.</u> $X^2 \sim \chi_n^2$. $\mathbb{E}[X^2] = n$, $V[X^2] = 2n$. □

<u>Prop.</u> $Z \sim N(0,1)$. $\Rightarrow$ $Z^2 \sim \chi_1^2$. □

pf. $Z \sim N(0,1)$ より、$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$.

平方変換 $Y = Z^2$ を施すと、

$$f_Y(y) = \left(f_Z(\sqrt{y}) + f_Z(-\sqrt{y})\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} f_Z(\sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \quad (y>0)$$

$\therefore$ $Z^2 \sim \chi_1^2$. ∎

3.2.4 指数分布とハザード関数.

Def. (指数分布)

$\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. X の pdf が

$$f_X(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0)$$

のとき, X はパラメータ λ の指数分布に従うという.

$X \sim Ex(\lambda)$ とかく. $\square$

- $Ex(\lambda) = Ga(1, \frac{1}{\lambda})$.
- cdf は $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Prop. $X \sim Ex(\lambda)$.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}. \quad \square$$

- 生存時間の分布として用いられることがある.

$X \sim Ex(\lambda)$.

時間 s をこえて生存する確率:

$$P(X > s) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x}.$$

Prop. (無記憶性)

$$X \sim Ex(\lambda). \quad P(X \geq s+t \mid X \geq s) = P(X \geq t). \quad \square$$

→ 指数分布において，故障（死亡）がランダムに起こる.

・ $X \geq 0$: cont. r.v.

x 時間まで動作して，$x+\Delta$ 時間までに故障する確率は，

$$P(x < X \leq x+\Delta \mid X > x)$$

$$= \frac{P(x < X \leq x+\Delta,\ X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(x < X \leq x+\Delta)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$\therefore \lim_{\Delta \searrow 0} \frac{P(x < X \leq x+\Delta \mid X > x)}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \searrow 0} \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} \frac{1}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

<u>Def.</u>（ハザード函数）

$\lambda(x) := \dfrac{f(x)}{1 - F(x)}$ を ハザード函数 という. □

・ $\lambda(x)$ は，x まで動作している条件のもとで次の瞬間に故障する確率密度を表す.

・ $X \sim Ex(\lambda)$ では，$\lambda(x) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$ (const.).

→ x まで動作して次の瞬間に故障する確率密度が λ で一定.

・ $\int_0^x \lambda(t)dt = \int_0^x \frac{f(t)}{1-F(t)}dt = -\int_0^x \frac{(1-F(t))'}{1-F(t)}dt$

$= \left[-\log(1-F(t))\right]_0^x = \log\frac{1-F(0)}{1-F(x)}$

$= \log\frac{1}{1-F(x)}$ 　(∵ $X \geqq 0$ より $F(0)=0$)

これより，以下が成立：

<u>Prop.</u> $X \geqq 0$: cont. r.v. 　$\lambda(x)$: Xのハザード関数．

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda(t)dt\right),$$

$$f_X(x) = \lambda(x)\exp\left(-\int_0^x \lambda(t)dt\right).$$

□

・ ハザード関数が時間経過に関して一定というのは不自然．

→ $\lambda(x) = \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{\alpha^\gamma}$ $(\alpha, \gamma > 0)$ のように

時間経過とともに故障しやすくなる／しにくくなるとする．

このとき，Xのpdfは

$$\int_0^x \lambda(t)dt = \frac{\gamma}{\alpha^\gamma}\left[\frac{1}{\gamma}x^\gamma\right]_0^x = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma.$$

$$\therefore f(x) = \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\gamma\right) \quad (x \geqq 0)$$

Def. (Weibull分布)

$\alpha, \gamma > 0$. $X \geq 0$ のpdfが

$$f_X(x|\alpha,\gamma) = \frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right)$$

のとき，Xはパラメータα, γの**Weibull分布**に従うという．

$X \sim We(\alpha, \gamma)$ とかく. $\square$

Prop. $X \sim We(\alpha, \gamma)$.

$$\mathbb{E}[X] = \alpha\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right),$$

$$\mathbb{V}[X] = \alpha^2\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{\gamma}\right) - \alpha^2\left(\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)\right)^2. \quad \square$$

pf.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty x\,\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right)dx \\
&= \gamma\int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right)dx \\
&= \alpha\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{1}{\gamma}}\,dy \qquad \left(\because\ y \leftarrow \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right) \\
&= \alpha\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty x^2\,\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right)dx \\
&= \alpha\gamma\int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma+1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right)dx \\
&= \alpha^2\int_0^\infty e^{-y}y^{\frac{2}{\gamma}}\,dy \qquad \left(\because\ y \leftarrow \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\gamma}\right) \\
&= \alpha^2\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{\gamma}\right).
\end{aligned}$$

▨

3.2.5 ベータ分布.

Def. (ベータ分布).

$a, b > 0$, $(0, 1)$ 上の X の pdf が

$$f_X(x \mid a, b) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

のとき, X はパラメータ a, b の ベータ分布 に従うという.

$X \sim Be(a, b)$ とかく. □

Prop. $X \sim Be(a, b)$.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b}, \quad \mathbb{V}[X] = \frac{ab}{(a+b)^2 (a+b+1)}. \quad \square$$

pf.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1} dx$$

$$= \frac{B(a+1, b)}{B(a,b)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$= \frac{a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \frac{a}{a+b}.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

$$= \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} = \frac{a+1}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b}$$

$$\therefore \mathbb{V}[X] = \frac{a+1}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b} - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

$$= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} .$$

§3.3 発展的事項

3.3.1 Steinの等式.

・以下はモーメントの計算などに役立つ:

<u>Th.</u> (Steinの等式)

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. g:微分可能, $\mathbb{E}[|g'(X)|] < \infty$.

$\Rightarrow \mathbb{E}[(X-\mu)g(X)] = \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X)]$. □

pf.

$$\mathbb{E}[(X-\mu)g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(x-\mu)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\left[-\sigma^2 g(x) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \right)$$

$$= \sigma^2 \mathbb{E}[g'(X)].$$ ▨

<u>Cor.</u> $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. $\mathbb{E}[X^m] = (m-1)\sigma^2 \mathbb{E}[X^{m-2}] + \mu \mathbb{E}[X^{m-1}]$. □

pf. Steinの等式より.

$$\mathbb{E}[X^m] = \mathbb{E}[(X-\mu)X^{m-1}] + \mu \mathbb{E}[X^{m-1}]$$

$$= (m-1)\sigma^2 \mathbb{E}[X^{m-2}] + \mu \mathbb{E}[X^{m-1}].$$ ▨

3.3.2 Stirlingの公式.

Prop. $\Gamma(k+a) \approx \sqrt{2\pi}\, k^{k+a-\frac{1}{2}} e^{-k}$. $\square$

pf. $$\Gamma(k+a) = \int_0^\infty x^{k+a-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_{-\sqrt{k}}^\infty (k+\sqrt{k}z)^{k+a-1} e^{-k-\sqrt{k}z} \sqrt{k}\, dz \quad (x = k+\sqrt{k}z \text{ と変数変換})$$

$$= k^{k+a-1+\frac{1}{2}} e^{-k} \int_{-\sqrt{k}}^\infty \left(1+\frac{z}{\sqrt{k}}\right)^{k+a-1} e^{-\sqrt{k}z} dz$$

$$= k^{k+a-\frac{1}{2}} e^{-k} \int_{-\sqrt{k}}^\infty \exp\left((k+a-1)\log\left(1+\frac{z}{\sqrt{k}}\right) - \sqrt{k}z \right) dz$$

$$= k^{k+a-\frac{1}{2}} e^{-k} \int_{-\sqrt{k}}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2} + o(1)\right) dz \quad (\because \log\text{の Taylor 展開})$$

$$= k^{k+a-\frac{1}{2}} e^{-k} \int_{\sqrt{k}}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)(1+o(1))\, dz$$

$$= k^{k+a-\frac{1}{2}} e^{-k} \int_{\sqrt{k}}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + o(1)$$

$$= k^{k+a-\frac{1}{2}} e^{-k} \left(\sqrt{2\pi} + o(1)\right).$$ $\blacksquare$

§3.4 その他の分布など.

Def. (対数正規分布)

$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. $X > 0$: r.v. の pdf が

$$f_X(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\, x} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (x > 0)$$

のとき, X はパラメータ μ, σ^2 の対数正規分布に従うといい,

$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ とかく. $\square$

- $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ のとき, $Y = \log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Def. (Parato分布)

$\alpha, \beta > 0$, $X > \alpha$: r.v. の pdf が

$$f_X(x \mid \alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} \quad (x > \alpha)$$

のとき, X はパラメータ α, β の Parato分布に従うといい,

$X \sim \mathrm{Parato}(\alpha, \beta)$ とかく. $\square$

Remark 離散型は Zipf分布.

$$P(X = k \mid s, N) = \frac{\frac{1}{k^s}}{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots, N \\ s \geq 1 \end{pmatrix}$$

Def. (Cauchy分布)

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. X のpdfが

$$f_X(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

のとき, X はパラメータ μ, σ の Cauchy分布 に従うといい.

$X \sim C(\mu, \sigma)$ とかく. $\square$

Prop. (再生性)

$$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} C(\mu, \sigma) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim C(n\mu, n\sigma). \quad \square$$

Prop. $X \sim C(\mu, \sigma) \Rightarrow \frac{1}{X} \sim C\left(\frac{\mu}{\mu^2+\sigma^2}, \frac{\sigma}{\mu^2+\sigma^2}\right)$. $\square$

Prop. $X \sim C(\mu, \sigma)$. μ は X の median かつ mode. $\square$

Prop. $X \sim N(0, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$, X, Y : indep.

$\Rightarrow \frac{X}{Y} \sim C\left(0, \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\right)$. $\square$

Def. (Laplace分布)

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. X のpdfが

$$f_X(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

のとき, X はパラメータ μ, σ の Laplace分布 に従うといい.

$X \sim Lap(\mu, \sigma)$ とかく. $\square$

Def. (ロジスティック分布)

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. X の pdf が

$$f_X(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{4\sigma}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x-\mu}{2\sigma}\right) \qquad \left(\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta}\right)$$

のとき, X はパラメータ μ, σ の ロジスティック分布 に従うといい,

$X \sim \mathrm{Logistic}(\mu,\sigma)$ とかく. $\square$

- ロジスティック分布も, 正規分布と同様, $x = \mu$ に関して対称.
- ロジスティック分布の方が正規分布よりも裾が厚い.

Def. (平均余寿命函数)

$X \geq 0$: cont. r.v. 平均余寿命函数 を

$$r(t) := \mathbb{E}[X-t \mid X \geq t]$$

で定める. $\square$

Prop. (1) $r(t) = \dfrac{1}{1-F_X(t)}\displaystyle\int_t^\infty (1-F_X(x))\,dx$.

(2) $\mathbb{E}[X^2] = 2\displaystyle\int_0^\infty r(t)(1-F_X(t))\,dt$

pf. (1) $r(t) = \mathbb{E}[X-t \mid X \geq t]$

$$= \int_t^\infty (x-t)\cdot\frac{1}{P(X\geq t)}\frac{d}{dx}F_X(x)\,dx$$

$$= -\int_t^\infty (x-t)\frac{1}{1-F_X(t)}\frac{d}{dx}\left(1-F_X(x)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{1-F_X(t)}\left(\left[(x-t)(1-F_X(x))\right]_t^{\infty} - \int_t^{\infty}(1-F_X(x))\,dx\right)$$

$$\underset{?}{=} \frac{1}{1-F_X(t)}\int_t^{\infty}(1-F_X(x))\,dx .$$

(2) $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \frac{d}{dx}F_X(x)\,dx$